Ueber die Reduction

der

Integrale einer besonderen Classe von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 11. August 1877

VON

Georg Hettner

aus Jena.

AGAD. BIBL.

OPPONENTEN:

Theodor Gross, Dr. philos.
Johannes Knoblauch, Cand. math.
Georg Valentin, Cand. math.

BERLIN.

BUCHDRUCKEREI VON GUSTAV SCHADE (OTTO FRANCKE).

Linienstr. 158.

1.

Besteht zwischen den beiden veränderlichen Grössen x, y eine irreducible algebraische Gleichung

$$F(x,y) = 0,$$

welche in y vom $n$ten Grade ist, so gehören zu jedem Werthe von x n Werthe von y, die mit

$$y', y'', \ldots y^{(n)}$$

bezeichnet werden mögen. Dieselben sind nur dann nicht nothwendig sämmtlich unter einander verschieden, wenn x einen der nur in endlicher Anzahl vorhandenen Werthe $a_1\ a_2 \ldots$ hat, für welche die Discriminante $D(x)$ der gegebenen Gleichung, dieselbe als Gleichung für y betrachtet, verschwindet. Je zwei zusammengehörige Werthe von x und y werden ein Werthepaar (xy) genannt und die Gesammtheit der Werthepaare (xy) liefert das durch die irreducible algebraische Gleichung $F(x,y) = 0$ definirte algebraische Gebilde. Ein bestimmtes Werthepaar (ab) wird als die Stelle (ab) in diesem Gebilde bezeichnet.

Es sei nun a eine willkürlich, jedoch von $a_1\ a_2 \ldots$ verschieden angenommene Grösse, so lassen sich für alle Werthe von x, für die der absolute Betrag $|x-a|$ kleiner als jede der Differenzen $|a_1-a|$, $|a_2-a| \ldots$ ist, bei denen also x in einer gewissen Umgebung des Werthes a liegt, die n zugehörigen Werthe $y'\ y'' \ldots y^{(n)}$ durch n verschiedene convergirende Potenzreihen der Form

$$b + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

darstellen. Setzt man in diesen Reihen

$$x - a = t,$$

so nehmen dieselben die Form

$$b + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots\ldots$$

an und man sagt, in der Umgebung des Werthes a werden die sämmtlichen Werthepaare (xy) des Gebildes durch n verschiedene Functionenpaare der Form

$$x_t = a + t, \quad y_t = \mathfrak{P}(t)$$

geliefert, wo das Functionszeichen $\mathfrak{P}$ hier, wie im Folgenden, eine Potenzreihe des Argumentes mit nur positiven ganzzahligen Potenzen darstellt. Wenn aber für a einer der Werth $a_1\ a_2 \ldots$ genommen wird, so können die Entwickelungen von $y'\ y'' \ldots y^{(n)}$ in der Umgebung des Werthes a gebrochene Potenzen von $x-a$ enthalten. Jede Reihe hat dann die Gestalt

$$b + b_1(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + b_2(x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots\ldots,$$

wobei α eine positive ganze Zahl $\geqq 1$ bedeutet. Aus einer solchen Reihe, in der $\alpha > 1$ ist,

lassen sich $(\alpha-1)$ andere, ebenfalls zur Gesammtheit derselben gehörige ableiten, indem man an die Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ resp.

$$\varepsilon_1 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \varepsilon_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots\ldots \varepsilon_{\alpha-1} (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt, wo $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\alpha-1}$ die von 1 verschiedenen αten Wurzeln der Einheit sind. Diese $(\alpha-1)$ Reihen bilden mit der ursprünglichen zusammen eine Gruppe von α einander conjugirten Reihen, welche die Eigenschaft haben, dass aus jeder von ihnen die übrigen durch die angegebene Substitution erhalten werden können. Ist n' die Anzahl der Gruppen, in welche auf diese Weise die Entwickelungen für $y'\ y'' \ldots y^{(n)}$ zerfallen und ist α_λ der gemeinschaftliche Nenner für die Reihen der λten Gruppe, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\lambda + \ldots + \alpha_{n'} = n.$$

Wird nun in der λten dieser Gruppen

$$x - a = t^{\alpha_\lambda}$$

gesetzt, so lassen sich die λ Potenzreihen dieser Gruppe in eine Reihe der Form

$$b + b_1\, t + b_2\, t^2 + \ldots\ldots$$

zusammenfassen. Liegt also x in der Umgebung eines solchen Werthes a, so erhält man die sämmtlichen zugehörigen Werthe y durch n' Functionenpaare der Form

$$x_t = a + t^{\alpha_\lambda}, \quad y_t = \mathfrak{P}(t).$$

Werden für $x = a$ gewisse der zugehörigen Werthe von y unendlich gross, so enthalten die entsprechenden Potenzreihen von $x-a$ resp. t auch negative Potenzen, stets jedoch nur in endlicher Anzahl.

Ist x dem absoluten Betrage nach grösser als jede der Grössen $a_1\ a_2 \ldots$, so liegt x in der Umgebung des unendlich grossen Werthes. Es lassen sich sodann die n zugehörigen Werthe von y nach ganzen resp. gebrochenen Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickeln und zwar haben die Reihen dieselbe Form, wie die obigen, wenn man in jenen $x-a$ mit $\frac{1}{x}$ vertauscht. Je nachdem für unendlich grosses x ein zugehöriger Werth von y endlich oder unendlich gross ist, enthält die Reihe nur positive Potenzen von $\frac{1}{x}$ oder eine endliche Anzahl von negativen Potenzen. Durch die Substitution

$$x = t^{-1} \text{ resp. } x = t^{-\alpha_\lambda}$$

erhält man die sämmtlichen zugehörigen Werthe y durch Potenzreihen von t dargestellt, die nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von t enthalten können. — Werden die zu einem unendlich grossen Werthe von x zugehörigen Werthe $y'\ y'' \ldots y^{(n)}$ durch n verschiedene Functionenpaare geliefert, so soll das Gebilde im Unendlichen regulär heissen. — Die Eigenschaften der Functionenpaare $(x_t\ y_t)$ bleiben vollständig bestehen, wenn man in ihnen für t eine Potenzreihe von t der Form

$$c_1 t + c_2 t^2 + \ldots\ldots$$

setzt, in der aber der Coefficient c_1 von Null verschieden sein muss.

Unter einer rationalen Function $R(xy)$ des Paares (xy) versteht man eine rationale Function der durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ verbundenen Veränderlichen x und y. Führt man

in die Function $R(xy)$ statt (xy) ein Functionenpaar $(x_t\, y_t)$ ein, welches die Umgebung irgend einer Stelle $(a\, b)$ darstellt, so wird

$$R(x_t\, y_t) = C t^{\nu} \{1 + t\, \mathfrak{P}(t)\}.$$

Ist in dieser Entwickelung $\nu = 0$, so hat $R(x\, y)$ an der Stelle $(a\, b)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth; ist aber $\nu > 0$ oder $\nu < 0$, so wird $R(x\, y)$ an der Stelle $(a\, b)$ von der ν ten Ordnung resp. Null oder unendlich gross. Jede rationale Function des Paares $(x\, y)$ nimmt nun jeden beliebigen vorgeschriebenen Werth für eine gleiche Anzahl Werthepaare an und es wird diese Anzahl der Grad der rationalen Function genannt. Demgemäss lässt sich der Grad auch als die Anzahl der Werthepaare definiren, für welche die rationale Function unendlich wird, vorausgesetzt, dass man jedes Werthepaar so oft zählt, als die zugehörige Ordnungszahl angiebt.

Die Aufgabe, eine Function p ten Grades des Paares $(x\, y)$ zu bilden, die an p beliebig gewählten Stellen $(x_1\, y_1), \ldots (x_p\, y_p)$ von der ersten Ordnung unendlich wird, ist nur dann lösbar, wenn p grösser ist, als eine gewisse ganze Zahl ϱ. Diese Zahl ϱ hängt nur von den Eigenschaften des durch die gegebene algebraische Gleichung $F(x,y) = 0$ definirten Gebildes ab und wird der Rang desselben genannt.

Um den Rang aus der Gleichung $F(x,y) = 0$ direct zu ermitteln, stellt man für die Umgebung jedes Werthes a_ν, für den die Discriminante $D(x)$ der Gleichung $F(x,y) = 0$ verschwindet, die Entwickelungen der Werthe von y nach Potenzen von $x - a_\nu$ her und sucht die Anzahl n' der Gruppen auf, in welche diese Entwickelungen zerfallen, oder was dasselbe ist, man ermittelt die Anzahl der Functionenpaare $(x_t\, y_t)$, die sämmtliche Stellen $(x\, y)$ in der Umgebung des Werthes a_ν liefern. Bildet man für jeden dieser Werthe a_ν die Differenz $n - n'$ und setzt die Summe aller dieser Differenzen

$$\sum (n - n') = s,$$

so ist der Rang der Gleichung $F(x,y) = 0$

$$\varrho = \frac{s}{2} - (n-1).$$

Aus der Definition des Ranges geht hervor, dass sich stets eine rationale Function des Paares $(x\, y)$ bilden lässt, welche an $\varrho + 1$ beliebig gewählten Stellen $(a_1\, b_1), (a_2\, b_2), \ldots (a_\varrho\, b_\varrho)$ und $(x'\, y')$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Dabei sollen die ϱ Stellen $(a_\alpha\, b_\alpha)$ als fest, die Stelle $(x'\, y')$ aber als variabel betrachtet werden. Durch die weiteren Bedingungen, dass die Function an einer vorgeschriebenen Stelle $(a_o\, b_o)$ verschwindet und dass in der Entwickelung der Function nach Potenzen von $x - x'$ der Coefficient von $(x - x')^{-1}$ gleich $-\frac{d}{dy'} F(x'\, y')$ ist, wird eine rationale Function des Paares $(x\, y)$

$$H(x\, y,\, x'\, y')$$

eindeutig bestimmt. Bedeutet nun $(x_t^\alpha\, y_t^\alpha)$ das Functionenpaar für die Umgebung der Stelle $(a_\alpha\, b_\alpha)$, so ist

$$H(x_t^\alpha\, y_t^\alpha,\, x'\, y') = t^{-1}\, H(x'\, y')_\alpha + H^\circ(x'\, y')_\alpha - t\, H'(x'\, y')_\alpha + \ldots \quad (\alpha = 1,2,\ldots \varrho).$$

Diese Entwickelungen definiren als Coefficienten von t^{-1} ϱ rationale, von einander linear unabhängige, Functionen $H(x\,y)_\alpha$ und als Coefficienten von t ϱ ebenfalls rationale und linear unabhängige Functionen $H'(x\,y)_\alpha$. Für jedes beliebige Paar $(x_t\,y_t)$ des Gebildes ist stets

$$H(x_t\,y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = \mathfrak{P}(t)$$

und es lässt sich zeigen, dass jede rationale Function $H(x\,y)$, für welche stets

$$H(x_t\,y_t) \frac{dx_t}{dt} = \mathfrak{P}(t)$$

ist, als ein ganzes lineares homogenes Aggregat der ϱ Functionen $H(x\,y)_\alpha$ dargestellt werden kann. Bilden die Functionen

$$H^{(1)}(x\,y),\quad H^{(2)}(x\,y), \ldots\ldots H^{(\varrho)}(x\,y)$$

irgend ein System von ϱ solchen linear unabhängigen Functionen $H(x\,y)$, so lassen sich umgekehrt auch die Functionen $H(x\,y)_\alpha$ als ganze lineare homogene Functionen der ϱ Functionen $H^{(\alpha)}(x\,y)$ darstellen. — Die Functionen $H'(x\,y)_\alpha$ haben hingegen die durch die folgenden drei Gleichungen

$$H'(x_t\,y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = \mathfrak{P}(t)$$

$$H'(x_t^\alpha\,y_t^\alpha)_\alpha \frac{dx_t^\alpha}{dt} = -\,t^{-2} + \mathfrak{P}(t)$$

$$H'(x_t^\beta\,y_t^\beta)_\alpha \frac{dx_t^\beta}{dt} = t\,\mathfrak{P}(t)$$

ausgedrückten characteristischen Eigenschaften, in denen $(x_t\,y_t)$ ein beliebiges von $\left(x_t^\alpha\,y_t^\alpha\right)$ und $\left(x_t^\beta\,y_t^\beta\right)$ verschiedenes Functionenpaar bedeutet.

Die Integrale dieser rationalen Functionen

$$\int H(x\,y)_\alpha\,dx, \qquad \int H'(x\,y)_\alpha\,dx, \quad (\alpha = 1,2,\ldots\varrho)$$

und

$$\int H(x'\,y'\,x\,y)\,dx$$

bilden die ϱ Normalintegrale erster und zweiter Gattung und das Normalintegral dritter Gattung für das durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ definirte Gebilde. Ist $R(x\,y)$ eine beliebige rationale Function des Paares $(x\,y)$ und beginnt die Entwickelung von

$$R(x_t\,y_t) \frac{dx_t}{dt}$$

nach Potenzen von t nur in der Umgebung der r Stellen $(x_1\,y_1)\ldots(x_r\,y_r)$ mit negativen Potenzen, so lässt sich das Integral derselben durch die Gleichung

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(x\,y)\,dx = \sum_1^\varrho{}_\alpha\, g_\alpha \int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} H(x\,y)_\alpha\,dx + \sum_1^\varrho{}_\alpha\, g'_\alpha \int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} H'(x\,y)_\alpha\,dx + \sum_1^r{}_\nu\, c_\nu \int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} H(x_\nu\,y_\nu\,x\,y)\,dx$$

$$+ \sum_1^r{}_\nu\, [R(x_1\,y_1)_\nu - R(x_0\,y_0)_\nu]$$

auf ein Aggregat von ϱ Normalintegralen erster Gattung, ϱ Normalintegralen zweiter Gattung, r Normalintegralen dritter Gattung und einen algebraischen Theil reduciren.

Werden in die Gleichung $F(x,y) = 0$ statt x, y zwei neue Variabeln ξ, η so eingeführt, dass nicht nur x und y rationale Functionen von ξ, η, sondern auch umgekehrt ξ und η rationale Functionen von x, y sind, so hat die transformirte Gleichung zwischen ξ und η bei einer solchen eindeutigen rationalen Transformation denselben Rang, wie die ursprüngliche Gleichung $F(x,y) = 0$. Jede Gleichung vom Range 1 oder 2 lässt sich durch eine eindeutige Transformation auf die der Theorie der hyperelliptischen Integrale zu Grunde liegende Gleichung $\eta^2 - R(\xi) = 0$ zurückführen, während für Gleichungen höheren Ranges die eindeutige Transformation in eine solche Gleichung nur in speciellen Fällen möglich ist.

Im Folgenden wird nun für das durch die Gleichung

$$F(x)\, y^4 + G(x)\, y^2 + H(x) = 0$$

definirte algebraische Gebilde, wobei $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ ganze rationale Functionen von beliebig hohem Grade bedeuten, der Rang ϱ allgemein berechnet, sodann wird jene Gleichung durch eine eindeutige Substitution so transformirt, dass sie im Unendlichen regulär ist, und es werden für die so transformirte Gleichung die ϱ Functionen $H(x\,y)_\alpha$ allgemein hergestellt. Hierauf werden alle diejenigen jener Gleichungen, deren Rang 1 oder 2 ist, und ausserdem für jeden beliebigen Rang eine bestimmte Gattung von Gleichungen jener Form durch eine eindeutige Substitution in die Normalform $\eta^2 - R(\xi) = 0$ übergeführt.

Ist aber eine Gleichung $F(x,y) = 0$ rational in $\eta^2 - R(\xi) = 0$ transformirt, so lassen sich auch die Integrale der aus $F(x,y) = 0$ entspringenden algebraischen Differentiale $R(x\,y)\,dx$ unmittelbar auf die hyperelliptischen Integrale reduciren. In den erwähnten Fällen ist daher dann die Aufgabe, die Integrale der aus

$$F(x)\, y^4 + G(x)\, y^2 + H(x) = 0$$

entspringenden algebraischen Differentiale auf die hyperelliptischen Integrale zurückzuführen, gelöst.

2.

In Folge der rationalen Substitution

$$y = \frac{z}{F(x)}$$

geht die Gleichung

$$F(x)\, y^4 + G(x)\, y^2 + H(x) = 0$$

in

$$z^4 + G(x)\, F(x)\, z^2 + H(x)\, F(x)^3 = 0$$

über, es genügt daher ohne die Allgemeinheit zu beschränken nur solche Gleichungen zu betrachten, bei denen $F(x) = 1$ ist. Daher kann den folgenden Untersuchungen die Gleichung

$$f(x,y) = y^4 - 2\,P(x)\,y^2 + Q(x) = 0,$$

wo $P(x)$ und $Q(x)$ ganze rationale Functionen von x bedeuten, zu Grunde gelegt werden. Die Discriminante dieser Gleichung, dieselbe als Gleichung für y^2 betrachtet, werde mit

$$R(x) = P^2(x) - Q(x)$$

bezeichnet; es ist dann

$$[y^2 - P(x)]^2 - R(x) = 0, \qquad y = \sqrt{P(x) + \sqrt{R(x)}}.$$

Die Gleichung $f(x,y) = 0$ muss irreducibel sein. In einen für y linearen Factor und einen irreduciblen Factor dritten Grades von y kann $f(x,y)$ nicht zerfallen. Lässt sich die Function in zwei in y quadratische Factoren

$$y^2 - 2P_1(x)\,y + Q_1(x), \quad y^2 - 2P_2(x)\,y + Q_2(x)$$

zerlegen, so folgt

$$P_1(x) + P_2(x) = 0, \quad Q_1(x) + 4P_1(x)\,P_2(x) + Q_2(x) = -2P(x)$$
$$P_1(x)\,Q_2(x) + Q_1(x)\,P_2(x) = 0, \quad Q_1(x)\,Q_2(x) = Q(x).$$

Wenn $P_1(x)$ identisch Null ist, so muss $P_2(x)$ ebenfalls identisch Null und $R(x)$ ein Quadrat sein; ist dies nicht der Fall, so erhält man

$$P(x) = 2P_1^2(x) - Q_1(x), \quad Q(x) = Q_1^2(x), \quad R(x) = 4P_1^2(x)\,[P_1^2(x) - Q_1(x)].$$

Umgekehrt, wenn $R(x)$ ein Quadrat ist, oder wenn $P(x)$ und $Q(x)$ sich auf die vorstehende Form bringen lassen, so zerfällt auch wirklich die Gleichung $f(x,y) = 0$ in die beiden Gleichungen

$$y^2 - 2P_1(x)\,y + Q_1(x) = 0, \qquad y^2 + 2P_1(x)\,y + Q_1(x) = 0.$$

Durch die Substitution

$$y = \eta \pm P_1(x)$$

reducirt sich aber jede derselben auf die Normalform

$$\eta^2 - [P_1^2(x) - Q_1(x)] = 0.$$

Es werde nun angenommen, die Functionen $P(x)$ und $Q(x)$ seien so beschaffen, dass die Gleichung

$$f(x,y) = y^4 - 2P(x)\,y^2 + Q(x) = 0$$

irreducibel ist. Insbesondere darf also die Function $Q(x)$ nicht identisch Null sein; auch der Fall, dass $P(x)$ identisch verschwindet, kann ausgeschlossen werden, da sich die Gleichung dann auf die einfachere

$$y^4 + Q(x) = 0$$

reducirt, deren Transformation in die Gleichung $\eta^2 - R(\xi) = 0$ bereits behandelt worden ist (Netto, diss. inaug., 1870).

Die Functionen $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ seien gleich

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^{\lambda_0} + a'x^{\lambda_0-1} + \ldots + a^{(\lambda_0)} \\
&= a\,(x-a_1)^{l_1}\,(x-a_2)^{l_2}\ldots(x-a_l)^{l_l}\,(x-e_1)^{\lambda_1}\ldots(x-e_\nu)^{\lambda_\nu} \\
Q(x) &= bx^{\mu_0} + b'x^{\mu_0-1} + \ldots + b^{(\mu_0)} \\
&= b\,(x-b_1)^{2m_1+\beta_1}\,(x-b_2)^{2m_2+\beta_2}\ldots(x-b_\mu)^{2m_\mu+\beta_\mu}\,(x-e_1)^{\mu_1}\ldots(x-e_\nu)^{\mu_\nu} \\
R(x) &= cx^{2\nu_0+\varepsilon_0} + c'x^{2\nu_0+\varepsilon_0-1} + \ldots + c^{(2\nu_0+\varepsilon_0)} \\
&= c(x-c_1)^{2n_1+\gamma_1}(x-c_2)^{2n_2+\gamma_2}\ldots(x-c_\nu)^{2n_\nu+\gamma_\nu}(x-e_1)^{2\nu_1+\varepsilon_1}\ldots(x-e_\nu)^{2\nu_\nu+\varepsilon_\nu},
\end{aligned}$$

wo die Grössen $a_\varkappa\,b_\varkappa\,c_\varkappa\,e_\varkappa$ sämmtlich unter einander verschieden sein sollen, $l_\varkappa\,m_\varkappa\,n_\varkappa\,\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa\,\nu_\varkappa$ ganze positive Zahlen oder Null bedeuten und $\beta_\varkappa\,\gamma_\varkappa\,\varepsilon_\varkappa$ gleich 0 oder 1 sind. Während für die Stellen $a_\varkappa\,b_\varkappa\,c_\varkappa$ resp. nur eine der drei Functionen verschwindet, werden für $x = e_\varkappa$ gleichzeitig $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ und $R(x) = 0$. Für die ganzen Zahlen λ_0, μ_0, $2\nu_0 + \varepsilon_0$ bestehen die Relationen

$$\lambda_0 = \Sigma l + \Sigma\lambda, \quad \mu_0 = 2\Sigma m + \Sigma\beta + \Sigma\mu, \quad 2\nu_0 + \varepsilon_0 = 2\Sigma n + \Sigma\gamma + 2\Sigma\nu + \Sigma\varepsilon.$$

3.

Der Rang ϱ der Gleichung $f(x,y) = 0$ soll nun nach der angegebenen Methode berechnet werden. Bezeichnen y' y'' y''' y'''' die vier Werthe von y, welche einem Werth von x entsprechen, und wird

$$f(x,y)_2 = \frac{df(x,y)}{dy} = 4y\,[y^2 - P(x)]$$

gesetzt, so ist die Discriminante der Gleichung $f(x,y) = 0$, dieselbe als Gleichung für y aufgefasst,

$$D(x) = f(x,y')_2\, f(x,y'')_2\, f(x,y''')_2\, f(x,y'''')_2 = 4^4\, Q(x)\, R(x)^2.$$

Die Discriminante $D(x)$ verschwindet für $x = b_\varkappa,\ c_\varkappa,\ e_\varkappa$. Zu jeder anderen im Endlichen liegenden Stelle x gehören $n = 4$ Functionenpaare, es braucht also nur die Anzahl der Paare (x_t, y_t), welche zu diesen im Endlichen liegenden Stellen $x = b_\varkappa,\ c_\varkappa,\ e_\varkappa$ gehören, ermittelt zu werden. Ausserdem ist noch die Anzahl der Functionenpaare besonders zu untersuchen, welche einem unendlich grossen Werthe von x entsprechen.

1. Sei

$$Q(x) = (x - b_\varkappa)^{2m_\varkappa + \beta_\varkappa}\, Q(x, b_\varkappa),$$

so ist $Q(b_\varkappa, b_\varkappa)$ von Null verschieden. Aus der Entwickelung

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = (x - b_\varkappa)^{2m_\varkappa + \beta_\varkappa} \left\{ \frac{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)}{P(b_\varkappa)} + (x - b_\varkappa)\, \mathfrak{P}(x - b_\varkappa) \right\}$$

ergiebt sich nun

$$y^2 = P(x) \pm \left\{ P(x) - \tfrac{1}{2} \frac{Q(x)}{P(x)} - \tfrac{1}{8} \frac{Q^2(x)}{P^3(x)} + \ldots \right\}$$

$$= \begin{cases} 2\,P(b_\varkappa)\, \{1 + (x - b_\varkappa)\, \mathfrak{P}(x - b_\varkappa)\} \\ \tfrac{1}{2} (x - b_\varkappa)^{2m_\varkappa + \beta_\varkappa} \dfrac{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)}{P(b_\varkappa)} \left\{ 1 + (x - b_\varkappa)\, \mathfrak{P}(x - b_\varkappa) \right\}. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Reihen liefert die beiden Functionenpaare

$$x_t = b_\varkappa + t, \quad y_t = + \sqrt{2\,P(b_\varkappa)}\, \{1 + t\, \mathfrak{P}(t)\}$$

$$x_t = b_\varkappa + t, \quad y_t = - \sqrt{2\,P(b_\varkappa)}\, \{1 + t\, \mathfrak{P}(t)\}.$$

Die zweite Reihe giebt für $\beta_\varkappa = 0$

$$x_t = b_\varkappa + t, \quad y_t = + t^{m_\varkappa} \sqrt{\tfrac{1}{2} \frac{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)}{P(b_\varkappa)}}\, \{1 + t\, \mathfrak{P}(t)\}$$

$$x_t = b_\varkappa + t, \quad y_t = - t^{m_\varkappa} \sqrt{\tfrac{1}{2} \frac{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)}{P(b_\varkappa)}}\, \{1 + t\, \mathfrak{P}(t)\}$$

und für $\beta_\varkappa = 1$ das eine Functionenpaar

$$x_t = b_\varkappa + \frac{2\,P(b_\varkappa)}{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)}\, t^2, \quad y_t = t^{2m_\varkappa + \beta_\varkappa} \left(\frac{2\,P(b_\varkappa)}{Q(b_\varkappa, b_\varkappa)} \right)^{m_\varkappa} \{1 + t^2\, \mathfrak{P}(t^2)\}.$$

Daher ist die Anzahl n' der für eine Stelle $b_\varkappa$ vorhandenen Paare (x_t, y_t) gleich 4 oder 3, je nachdem $\beta_\varkappa = 0$ oder 1 ist. Demgemäss ist stets für eine Stelle $b_\varkappa$ die Differenz

$$n - n' = \beta_\varkappa.$$

2. Wird gesetzt

$$R(x) = (x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+\gamma_\varkappa} R(x, c_\varkappa),$$

so kommt

$$y^2 = P(c_\varkappa) + (x-c_\varkappa) P'(c_\varkappa) + \ldots + \sqrt{(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+\gamma_\varkappa} R(c_\varkappa, c_\varkappa)} \left\{1 + \tfrac{1}{2} \frac{R'(c_\varkappa, c_\varkappa)}{R(c_\varkappa, c_\varkappa)} (x-c_\varkappa) + \ldots\right\}.$$

Für $\gamma_\varkappa = 0$ erhält man hieraus vier Functionenpaare der Form

$$x_t = c_\varkappa + t, \quad y_t = + \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\}$$
$$x_t = c_\varkappa + t, \quad y_t = - \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\}$$
$$x_t = c_\varkappa + t, \quad y_t = + \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\}$$
$$x_t = c_\varkappa + t, \quad y_t = - \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\}.$$

Ist aber $\gamma_\varkappa = 1$, so existiren nur die beiden Functionenpaare

$$x_t = c_\varkappa + R(c_\varkappa, c_\varkappa) t^2, \quad y_t = + \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\}$$
$$x_t = c_\varkappa + R(c_\varkappa, c_\varkappa) t^2, \quad y_t = - \sqrt{P(c_\varkappa)} \{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\}.$$

Folglich ist für jede Stelle $c_\varkappa$

$$n - n' = 2\gamma_\varkappa.$$

3. Die Grösse $\omega_\varkappa$ bezeichne die kleinere der beiden ganzen Zahlen $2\lambda_\varkappa$ und $2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$, oder falls $2\lambda_\varkappa = 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ sei auch $\omega_\varkappa$ jenen beiden Grössen gleich. Werden die Functionen

$$P(x, e_\varkappa), \; Q(x, e_\varkappa), \; R(x, e_\varkappa)$$

resp. durch die Gleichungen

$$P(x) = (x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa} P(x, e_\varkappa)$$
$$Q(x) = (x-e_\varkappa)^{\mu_\varkappa} Q(x, e_\varkappa)$$
$$R(x) = (x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa+\varepsilon_\varkappa} R(x, e_\varkappa)$$

definirt, so besteht die Relation

$$(x-e_\varkappa)^{2\lambda_\varkappa} P(x, e_\varkappa)^2 - (x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa+\varepsilon_\varkappa} R(x, e_\varkappa) = (x-e_\varkappa)^{\mu_\varkappa} Q(x, e_\varkappa),$$

daher ist für $2\lambda_\varkappa \gtrless 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ $\omega_\varkappa = \mu_\varkappa$ und für $2\lambda_\varkappa = 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ $\omega_\varkappa \leqq \mu_\varkappa$. Und zwar hat man für $2\lambda_\varkappa = 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$

$$\omega_\varkappa + q_\varkappa = \mu_\varkappa,$$

wenn das folgende System von $q_\varkappa$ Gleichungen

$$P(e_\varkappa, e_\varkappa) + \sqrt{R(e_\varkappa, e_\varkappa)}\, C_{\varkappa 0} = 0$$
$$R(e_\varkappa, e_\varkappa) P'(e_\varkappa, e_\varkappa) + \sqrt{R(e_\varkappa, e_\varkappa)}\, C_{\varkappa 1} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(q_\varkappa-1)!} R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{q_\varkappa-1} P^{(q_\varkappa-1)}(e_\varkappa, e_\varkappa) + \sqrt{R(e_\varkappa, e_\varkappa)}\, C_{\varkappa, q_\varkappa-1} = 0$$

besteht, jedoch

$$\frac{1}{q_\varkappa!} R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{q_\varkappa} P^{(q_\varkappa)}(e_\varkappa, e_\varkappa) + \sqrt{R(e_\varkappa, e_\varkappa)}\, C_{\varkappa, q_\varkappa}$$

von Null verschieden ist.

Dabei hat die Wurzelgrösse $\sqrt{R(e_\varkappa, e_\varkappa)}$ einen beliebigen ihrer beiden Werthe, aber in allen Gleichungen denselben Werth und es bedeutet

$$C_{\varkappa 0} = 1$$

$$C_{\varkappa r} = (\tfrac{1}{2})_1 \frac{1}{r!} R^{(r)}(e_\varkappa, e_\varkappa) R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{r-1} + (\tfrac{1}{2})_2 R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{r-2} \sum_{(r_1 + r_2 = r)} \frac{1}{r_1!} R^{(r_1)}(e_\varkappa, e_\varkappa) \frac{1}{r_2!} R^{(r_2)}(e_\varkappa, e_\varkappa) + \ldots,$$

wo sich die $m$te Summe in $C_{\varkappa r}$ auf alle positiven ganzzahligen Werthsysteme $r_1\ r_2 \ldots r_m$ bezieht, für welche $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = r$ ist. Daher enthält $C_{\varkappa r}$ nur r Glieder.

Die Entwickelung von y^2 nach Potenzen von $x - e_\varkappa$ ergiebt

$$y^2 = (x - e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa} P(e_\varkappa, e_\varkappa) \left\{1 + \frac{P'(e_\varkappa, e_\varkappa)}{P(e_\varkappa, e_\varkappa)} (x - e_\varkappa) + \ldots\right\}$$

$$+ \sqrt{(x - e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa} R(e_\varkappa, e_\varkappa)} \left\{1 + \tfrac{1}{2} \frac{R'(e_\varkappa, e_\varkappa)}{R(e_\varkappa, e_\varkappa)} (x - e_\varkappa) + \ldots\right\}.$$

Erstens sei nun $\varepsilon_\varkappa = 1$, so folgt nach der Definition von $\omega_\varkappa$ für

$$x - e_\varkappa = R(e_\varkappa, e_\varkappa)\, \tau^2 \qquad y^2 = C \tau^{\omega_\varkappa} \{1 + \tau \mathfrak{P}(\tau)\},$$

wo $$C = R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa} P(e_\varkappa, e_\varkappa) \text{ oder } C = R(e_\varkappa, e_\varkappa)^{\nu_\varkappa + 1}$$

ist, je nachdem $$2\lambda_\varkappa < 2\nu_\varkappa + 1 \text{ oder } 2\lambda_\varkappa > 2\nu_\varkappa + 1.$$

Wenn $\omega_\varkappa$ gerade, d. h. $2\lambda_\varkappa < 2\nu_\varkappa + 1$ ist, so ergeben sich hieraus die beiden Functionpaare

$$x_t = e_\varkappa + R(e_\varkappa, e_\varkappa) t^2, \qquad y_t = + \sqrt{C}\, t^{\frac{\omega_\varkappa}{2}} \{1 + t \mathfrak{P}(t)\}$$

$$x_t = e_\varkappa + R(e_\varkappa, e_\varkappa) t^2, \qquad y_t = - \sqrt{C}\, t^{\frac{\omega_\varkappa}{2}} \{1 + t \mathfrak{P}(t)\};$$

ist aber $\omega_\varkappa$ ungerade, d. h. $2\nu_\varkappa + 1 < 2\lambda_\varkappa$, so erhält man nur ein einziges Functionenpaar

$$x_t = e_\varkappa + C^2 R(e_\varkappa, e_\varkappa) t^4, \qquad y_t = C^{\frac{\omega_\varkappa + 1}{2}} t^{\omega_\varkappa} \{1 + t^2 \mathfrak{P}(t^2)\}.$$

Für $\varepsilon_\varkappa = 1$ ist demnach $n - n' = 2$ oder 3, je nachdem $\omega_\varkappa$ gerade oder ungerade ist. Wird also

$$\delta_\varkappa \equiv \frac{\omega_\varkappa}{2 - \varepsilon_\varkappa}, \ mod 2; \quad \delta_\varkappa = 0, 1$$

gesetzt, so folgt

$$n - n' = 2\varepsilon_\varkappa + \delta_\varkappa.$$

Zweitens sei $\varepsilon_\varkappa = 0$, mithin $\omega_\varkappa$ gerade und $\frac{\omega_\varkappa}{2}$ gleich der kleineren der Zahlen $\lambda_\varkappa$ und $\nu_\varkappa$. Die Substitution

$$x - e_\varkappa = R(e_\varkappa, e_\varkappa)\, \tau$$

liefert für die Werthe von y^2, wenn $\lambda_\varkappa \gtrless \nu_\varkappa$ oder $\lambda_\varkappa = \nu_\varkappa$ und $q_\varkappa = 0$, also $\omega_\varkappa = \mu_\varkappa$, zwei Potenzreihen der Form

$$y^2 = C_1 \tau^{\frac{1}{2}\omega_\varkappa} \{1 + \tau \mathfrak{P}_1(\tau)\}, \quad y^2 = C_2 \tau^{\frac{1}{2}\omega_\varkappa} \{1 + \tau \mathfrak{P}_2(\tau)\}, \quad C_1, C_2 \gtrless 0$$

und hieraus ergeben sich, wenn $\frac{1}{2}\omega_x$ gerade, vier Functionenpaare

$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)t, \qquad y_t = +\sqrt{C_1}\, t^{\frac{1}{4}\omega_x}\{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\}$$
$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)t, \qquad y_t = -\sqrt{C_1}\, t^{\frac{1}{4}\omega_x}\{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\}$$
$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)t, \qquad y_t = +\sqrt{C_2}\, t^{\frac{1}{4}\omega_x}\{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\}$$
$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)t, \qquad y_t = -\sqrt{C_2}\, t^{\frac{1}{4}\omega_x}\{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\}$$

und wenn $\frac{1}{2}\omega_x$ ungerade, zwei Functionenpaare

$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)C_1 t^2, \qquad y_t = C_1^{\frac{\omega_x+2}{4}}\, t^{\frac{\omega_x}{2}}\{1 + t^2\,\mathfrak{P}_1(t^2)\}$$
$$x_t = e_x + R(e_x, e_x)C_2 t^2, \qquad y_t = C_2^{\frac{\omega_x+2}{4}}\, t^{\frac{\omega_x}{2}}\{1 + t^2\,\mathfrak{P}_2(t^2)\}.$$

Es ist also das eine Mal $n-n' = 0$, das andere Mal $n-n' = 2$, daher in beiden Fällen

$$n-n' = 2\delta_x = 2\varepsilon_x + 2\delta_x.$$

Ist jedoch $\lambda_x = \nu_x$ und $q_x > 0$, also $\omega_x < \mu_x$, so werden die beiden Reihen für y^2 von der Form

$$y^2 = C_1\, \tau^{\frac{1}{2}\omega_x + q_x}\{1 + \tau\,\mathfrak{P}_1(\tau)\}, \qquad y^2 = C_2\, \tau^{\frac{1}{2}\omega_x}\{1 + \tau\,\mathfrak{P}_2(\tau)\}.$$

Die zweite Reihe für y^2 ergiebt, wie vorher, zwei Functionenpaare $(x_t\ y_t)$ für gerades $\frac{1}{2}\omega_x$ und ein einziges für ungerades $\frac{1}{2}\omega_x$. Ebenso liefert die erste Reihe für y^2 zwei oder ein Functionenpaar, je nachdem $\frac{1}{2}\omega_x + q_x = \mu_x - \frac{1}{2}\omega_x$ gerade oder ungerade ist. Da nun für gerades $\frac{1}{2}\omega_x$ μ_x und $\mu_x - \frac{1}{2}\omega_x$ gleichzeitig gerade und ungerade sind, dagegen für ungerades $\frac{1}{2}\omega_x$ μ_x gerade oder ungerade ist, je nachdem $\mu_x - \frac{1}{2}\omega_x$ ungerade oder gerade, so ergiebt sich für

$$\frac{1}{2}\omega_x \begin{cases} \text{gerade und } \mu_x & \begin{cases} \text{gerade:} & n-n' = 0 \\ \text{ungerade:} & n-n' = 1 \end{cases} \\ \text{ungerade und } \mu_x & \begin{cases} \text{ungerade:} & n-n' = 1 \\ \text{gerade:} & n-n' = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Führt man nun ausser der obigen Grösse δ_x noch eine Zahl $\zeta_x = 0,1$ durch die Congruenz

$$\zeta_x \equiv \mu_x + \delta_x, \text{ mod } 2$$

ein, so ist für $\varepsilon_x = 0$ stets

$$n-n' = 2\varepsilon_x + \delta_x + \zeta_x,$$

denn ist $q_x = 0$, so ist $\zeta_x = \delta_x$. Für $\varepsilon_x = 1$ ist $\mu_x = \omega_x \equiv \delta_x$, mod 2, folglich $\mu_x + \delta_x \equiv 0$, mod 2, also $\zeta_x = 0$; die vorstehende Formel für $n-n'$ gilt daher ganz allgemein für jede Stelle e_x.

4. Die Anzahl der Functionenpaare, welche zu einem unendlich grossen Werthe von x gehören, lässt sich analog wie im vorhergehenden Falle finden. Es werde ω_0 als die grössere der beiden ganzen Zahlen $2\lambda_0$ und $2\nu_0 + \varepsilon_0$ definirt oder für $2\lambda_0 = 2\nu_0 + \varepsilon_0$ sei auch ω_0 gleich jenen beiden Grössen. Aus der Gleichung

$$\{ax^{\lambda_0} + a'x^{\lambda_0-1} + .. + a^{(\lambda_0)}\}^2 - \{cx^{2\nu_0+\varepsilon_0} + c'x^{2\nu_0+\varepsilon_0-1} + .. + c^{(2\nu_0+\varepsilon_0)}\} = bx^{\mu_0} + b'x^{\mu_0-1} + .. + b^{(\mu_0)}$$

ergiebt sich, dass für $2\lambda_0 \gtrless 2\nu_0 + \varepsilon_0$ $\omega_0 = \mu_0$ und für $2\lambda_0 = 2\nu_0 + \varepsilon_0$ $\omega_0 \geqq \mu_0$ ist und zwar ist

$$\omega_0 - q_0 = \mu_0,$$

falls das System der folgenden q_0 Gleichungen

$$a + \sqrt{c}\ C_{00} = 0$$
$$ca' + \sqrt{c}\ C_{01} = 0$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$c^{q_0-1}\, a^{(q_0-1)} + \sqrt{c}\ C_{0,q_0-1} = 0$$

besteht, während

$$c^{q_0}\, a^{(q_0)} + \sqrt{c}\ C_{0q_0}$$

von Null verschieden ist. Dabei muss der Grösse $\sqrt{c}$ in allen Gleichungen derselbe Werth beigelegt werden und es ist gesetzt

$$C_{00} = 1$$
$$C_{0r} = (\tfrac{1}{2})_1\, c^{(r)}\, c^{r-1} + (\tfrac{1}{2})_2\, c^{r-2} \sum_{(r_1+r_2=r)} c^{(r_1)}\, c^{(r_2)} + \ldots\ldots$$

Ist erstens $\varepsilon_0 = 1$, so erhält man aus der Entwickelung

$$y^2 = ax^{\lambda_0}\left\{1 + \frac{a'}{a}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a^{(\lambda_0)}}{a}\frac{1}{x^{\lambda_0}}\right\} + \sqrt{cx^{2\nu_0+\varepsilon_0}\left\{1 + \frac{c'}{c}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{c^{(2\nu_0+\varepsilon_0)}}{c}\frac{1}{x^{2\nu_0+\varepsilon_0}}\right\}}$$

für gerades ω_0 die beiden Functionenpaare

$$x_t = c^{-1}\, t^{-2}, \qquad y_t = +\sqrt{C}\, t^{-\frac{1}{2}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\right\}$$
$$x_t = c^{-1}\, t^{-2}, \qquad y_t = -\sqrt{C}\, t^{-\frac{1}{2}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\right\},$$

für ungerades ω_0 das einzige Paar

$$x_t = c^{-1}\, C^{-2}\, t^{-4}, \quad y_t = C^{\frac{-\omega_0+1}{2}}\, t^{-\omega_0}\left\{1 + t^2\,\mathfrak{P}(t^2)\right\},$$

wo $C = ac^{-\lambda_0}$ oder $C = c^{-\nu_0}\, c^{-\nu_0}$ ist, je nachdem $2\lambda_0 > 2\nu_0 + 1$ oder $2\lambda_0 < 2\nu_0 + 1$.

Ist zweitens $\varepsilon_0 = 0$, so folgen für $\omega_0 = \mu_0$ vier Functionenpaare der Form

$$x_t = c^{-1}\, t^{-1}, \qquad y_t = +\sqrt{C_1}\, t^{-\frac{1}{4}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\right\}$$
$$x_t = c^{-1}\, t^{-1}, \qquad y_t = -\sqrt{C_1}\, t^{-\frac{1}{4}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\right\}$$
$$x_t = c^{-1}\, t^{-1}, \qquad y_t = +\sqrt{C_2}\, t^{-\frac{1}{4}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\right\}$$
$$x_t = c^{-1}\, t^{-1}, \qquad y_t = -\sqrt{C_2}\, t^{-\frac{1}{4}\omega_0}\left\{1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\right\},$$

wenn $\frac{1}{2}\omega_0$ gerade; aber zwei Functionenpaare

$$x_t = c^{-1}\, C_1^{-1}\, t^{-2}, \qquad y_t = C_1^{\frac{-\omega_0+2}{4}}\, t^{-\frac{1}{2}\omega_0}\left\{1 + t^2\,\mathfrak{P}_1(t^2)\right\}$$
$$x_t = c^{-1}\, C_2^{-1}\, t^{-2}, \qquad y_t = C_2^{\frac{-\omega_0+2}{4}}\, t^{-\frac{1}{2}\omega_0}\left\{1 + t^2\,\mathfrak{P}_2(t^2)\right\},$$

wenn $\frac{1}{2}\omega_0$ ungerade.

Ist aber $\omega_0 > \mu_0$, so ergeben sich genau wie bei den Stellen $e_\varkappa$ für

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 \begin{cases} \text{gerade und } \mu_0 & \begin{cases} \text{gerade: } 4 \text{ Functionenpaare, also } n-n' = 0 \\ \text{ungerade: } 3 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad n-n' = 1 \end{cases} \\ \text{ungerade und } \mu_0 & \begin{cases} \text{ungerade: } 3 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad n-n' = 1 \\ \text{gerade: } 2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad n-n' = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Mit Hülfe der Substitutionen

$$\delta_0 \equiv \frac{\omega_0}{2-\varepsilon_0}, \text{ mod } 2; \quad \zeta_0 \equiv \mu_0 + \delta_0, \text{ mod } 2; \quad \delta_0, \zeta_0 = 0,1$$

wird daher stets für unendlich grosses x die Differenz

$$n-n' = 2\,\varepsilon_0 + \delta_0 + \zeta_0.$$

Damit sind alle Fälle erschöpft, für welche die Anzahl n' der Functionenpaare, die zu einem Werthe von x gehören, weniger als vier betragen, bei denen also $n-n' > 0$ sein kann. Durch Addition der Werthe von $n-n'$ in diesen vier Fällen ergiebt sich unmittelbar die Zahl

$$s = \sum (n-n') = \sum_{\varkappa=1}^{m} \beta_\varkappa + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} \gamma_\varkappa + \sum_{\varkappa=0}^{r} (2\varepsilon_\varkappa + \delta_\varkappa + \zeta_\varkappa)$$

und hieraus der Rang

$$\varrho = \frac{s}{2} - 3.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass der gefundene Ausdruck für s wirklich immer eine gerade Zahl liefert.

Bedeutet also für die irreducible algebraische Gleichung

$$f(x,y) = y^4 - 2P(x)\,y^2 + Q(x) = 0,$$

in welcher die Functionen

$$P(x) = a\prod_{\varkappa=1}^{l}(x-a_\varkappa)^{l_\varkappa}\prod_{\varkappa=1}^{r}(x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}$$

$$Q(x) = b\prod_{\varkappa=1}^{m}(x-b_\varkappa)^{2m_\varkappa+\beta_\varkappa}\prod_{\varkappa=1}^{r}(x-e_\varkappa)^{\mu_\varkappa}$$

$$R(x) = P^2(x) - Q(x) = c\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+\gamma_\varkappa}\prod_{\varkappa=1}^{r}(x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa+\varepsilon_\varkappa}$$

resp. vom Grade λ_0, μ_0, $2\nu_0 + \varepsilon_0$ sind,

ω_0 die grössere der beiden Zahlen $2\lambda_0$ und $2\nu_0 + \varepsilon_0$

$\omega_\varkappa$ die kleinere der beiden Zahlen $2\lambda_\varkappa$ und $2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ $(\varkappa = 1,2,..r)$

und wird gesetzt

$$\left.\begin{aligned} \delta_\varkappa &\equiv \frac{\omega_\varkappa}{2-\varepsilon_\varkappa}, \text{ mod } 2; \quad \delta_\varkappa = 0,1 \\ \zeta_\varkappa &\equiv \mu_\varkappa + \delta_\varkappa, \text{ mod } 2; \quad \zeta_\varkappa = 0,1 \end{aligned}\right\} (\varkappa = 0,1,\ldots.r)$$

$$s = \sum_{\varkappa=1}^{m} \beta_\varkappa + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} \gamma_\varkappa + \sum_{\varkappa=0}^{r} (2\varepsilon_\varkappa + \delta_\varkappa + \zeta_\varkappa),$$

so ist der Rang von $f(x, y) = 0$

$$\varrho = \frac{s}{2} - 3.$$

Der Rang lässt sich also hiernach für die Gleichung $f(x, y) = 0$ allgemein berechnen.

4.

Wie sich bei der Darstellung der unendlich fernen Functionenpaare des durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definirten Gebildes gezeigt hat, wird deren Anzahl dann $= 4$, das Gebilde also im Unendlichen regulär, falls $\varepsilon_0 = 0$ und $\omega_0 = \mu_0 \equiv 0$, mod 4 ist. Lässt sich also eine rationale Substitution der Art angeben, dass für die transformirte Gleichung P^2, Q, R von gleichem Grade sind und dieser Grad den Theiler 4 hat, so ist die transformirte Gleichung im Unendlichen regulär.

Die Constanten α, β, γ, δ seien willkürlich doch so gewählt, dass die Grössen

$$\gamma, \quad \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \alpha - \gamma a_\varkappa, \quad \alpha - \gamma b_\varkappa, \quad \alpha - \gamma c_\varkappa, \quad \alpha - \gamma e_\varkappa$$

sämmtlich von Null verschieden sind. Es werde

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad \xi = -\frac{\beta - \delta x}{\alpha - \gamma x}$$

gesetzt, so ergiebt sich, wenn $\iota_0 = 0, 1, 2, 3$ aus der Congruenz

$$\omega_0 + \iota_0 \equiv 0, \text{ mod } 4$$

bestimmt wird,

$$P(x) = a\frac{(\gamma\xi + \delta)^{\frac{\omega_0+\iota_0}{2} - \lambda_0} \prod_{\varkappa=1}^{l} \left\{(\alpha - \gamma a_\varkappa)\xi + \beta - \delta a_\varkappa\right\}^{l_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{r} \left\{(\alpha - \gamma e_\varkappa)\xi + \beta - \delta e_\varkappa\right\}^{\lambda_\varkappa}}{(\gamma\xi + \delta)^{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}}}$$

$$= \frac{P(\xi)_{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}}}{(\gamma\xi + \delta)^{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}}}$$

$$Q(x) = b\frac{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0-\mu_0} \prod_{\varkappa=1}^{m} \left\{(\alpha - \gamma b_\varkappa)\xi + \beta - \delta b_\varkappa\right\}^{2m_\varkappa+\beta_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{r} \left\{(\alpha - \gamma e_\varkappa)\xi + \beta - \delta e_\varkappa\right\}^{\mu_\varkappa}}{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0}}$$

$$= \frac{Q(\xi)_{\omega_0+\iota_0}}{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0}}$$

$$R(x) = c\frac{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0-2\nu_0-\varepsilon_0} \prod_{\varkappa=1}^{n} \left\{(\alpha - \gamma c_\varkappa)\xi + \beta - \delta c_\varkappa\right\}^{2n_\varkappa+\gamma_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{r} \left\{(\alpha - \gamma e_\varkappa)\xi + \beta - \delta e_\varkappa\right\}^{2\nu_\varkappa+\varepsilon_\varkappa}}{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0}}$$

$$= \frac{R(\xi)_{\omega_0+\iota_0}}{(\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0}},$$

wo $P(\xi)_{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}}$, $Q(\xi)_{\omega_0+\iota_0}$, $R(\xi)_{\omega_0+\iota_0}$ ganze Functionen von ξ sind des Grades, der durch den

Index angegeben wird. Die Gleichung $f(x,y) = 0$ geht nun durch die obige Substitution in

$$y^4 (\gamma\xi + \delta)^{\omega_0+\iota_0} - 2 P(\xi)_{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}} y^2 (\gamma\xi + \delta)^{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}} + Q(\xi)_{\omega_0+\iota_0} = 0$$

über und führt man hier

$$\eta = y (\gamma\xi + \delta)^{\frac{\omega_0+\iota_0}{4}}$$

ein, so folgt

$$\eta^4 - 2 P(\xi)_{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}} \eta^2 + Q(\xi)_{\omega_0+\iota_0} = 0.$$

Für diese aus der ursprünglichen durch eindeutige Transformation hervorgegangene Gleichung sind $Q(\xi)_{\omega_0+\iota_0}$ und $R(\xi)_{\omega_0+\iota_0}$ vom selben Grade $\omega_0 + \iota_0$ und zwar von doppelt so hohem Grade, als $P(\xi)_{\frac{\omega_0+\iota_0}{2}}$. Die Zahl $\omega_0 + \iota_0$ ist durch 4 theilbar. Daher sind die obigen Bedingungen für die transformirte Gleichung sämmtlich erfüllt, dieselbe ist demnach im Unendlichen regulär.

Kommt in der Gleichung $f(x, y) = 0$ ein Factor $x - e_\varkappa$ in $P(x)$ in höherer als der ersten und gleichzeitig in $Q(x)$ in höherer als der dritten Potenz vor, hat dieselbe also die Form

$$y^4 - 2 (x - e_\varkappa)^{2\pi_\varkappa} \overline{P}(x) y^2 + (x - e_\varkappa)^{4\pi_\varkappa} \overline{Q}(x) = 0, \quad (\pi_\varkappa \geqq 1),$$

wo $\overline{P}(x)$ und $\overline{Q}(x)$ den Factor $x - e_\varkappa$ nicht gleichzeitig resp. in höherer als erster und dritter Potenz enthalten, so lässt sich die Gleichung durch eine eindeutige Transformation noch vereinfachen. In Folge der Substitution

$$y = \eta (x - e_\varkappa)^{\pi_\varkappa}$$

geht nämlich die Gleichung über in

$$\eta^4 - 2 \overline{P}(x) \eta^2 + \overline{Q}(x) = 0$$

und wird

$$R(x) = (x - e_\varkappa)^{4\pi_\varkappa} \overline{R}(x)$$

gesetzt, so ist auch

$$\overline{R}(x) = \overline{P}^2(x) - \overline{Q}(x).$$

Dabei ist diese transformirte Gleichung im Unendlichen regulär, wenn es die ursprüngliche war.

Demnach lässt sich die Gleichung

$$f(x, y) = y^4 - 2 P(x) y^2 + Q(x) = 0$$

durch successive eindeutige Substitutionen oder auch durch eine einzige solche Substitution so transformiren, dass sie im Unendlichen regulär, dass der Grad von $Q(x)$ gleich dem Grade von $R(x)$ und gleich dem doppelten Grade von $P(x)$ und dass kein Factor $x - e_\varkappa$ gleichzeitig in $P(x)$ in höherer als der ersten und in $Q(x)$ in höherer als der dritten Potenz enthalten ist.

Diese Beschaffenheit soll im Folgenden der Gleichung $f(x,y) = 0$ beigelegt werden. Der Grad μ_0 von $Q(x)$ und $R(x)$ werde dabei, da er durch 4 theilbar ist, mit

$$4\mu$$

bezeichnet; die Bezeichnungen für die Coefficienten und Linearfactoren von $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sollen dagegen aus dem Vorhergehenden beibehalten werden.

Man hat dann

$$a^2 - b = c$$

und

$$\begin{aligned} 4\mu &= 2(\Sigma l + \Sigma\lambda) = 2\Sigma m + \Sigma\beta + \Sigma\mu \\ &= 2\Sigma n + \Sigma\gamma + 2\Sigma\nu + \Sigma\varepsilon \\ &= \Sigma m + \Sigma n + \tfrac{1}{2}\{\Sigma\mu + \Sigma\beta + \Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon\} + \Sigma\nu. \end{aligned}$$

Ferner ist für die so transformirte Gleichung stets $\omega_x \leqq 3$; ein Factor $x - e_x$, wo $\omega_x \equiv 0$, mod 4, kann also nicht mehr vorkommen; für $\varepsilon_x = 0$ ist daher stets $\omega_x = 2$, $\delta_x = 1$.

Bei Gleichungen $f(x, y) = 0$ können nach Ausführung der angegebenen Transformation nur noch die folgenden verschiedenen Fälle eintreten für $\varrho = 1, 2, 3$:

ϱ	$\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon$	$\Sigma\beta + \Sigma(\delta + \zeta)$
1	2	4
	4	0
2	2	6
	4	2
3	2	8
	4	4
	6	0

Die Zahl μ, also der Grad der Functionen $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, kann dabei aber beliebig gross sein.

5.

Eine rationale Function $H(x\,y)$, deren Integration ein Integral erster Gattung liefert, wurde durch die Eigenschaft charakterisirt, dass für jedes beliebige Element $(x_t\, y_t)$ des durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ definirten Gebildes die Entwickelung von $H(x_t\, y_t)\frac{dx_t}{dt}$ nach t nur positive Potenzen enthält. Diese charakteristische Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen, dass für jede beliebige endliche Grösse k

$$[(x - k)\ H(x\,y)]_{x=k} = 0$$

und zugleich auch

$$[x\,H(x\,y)]_{x=\infty} = 0$$

sein muss. Hieraus ergiebt sich allgemein, dass jede Function $H(x\,y)$ der Quotient einer ganzen Function des Paares $(x\,y)$ dividirt durch die Function $F(x,y)_2 = \frac{dF(x,y)}{dy}$ ist, und zwar darf, wenn r die Dimension, m den Grad in x und n den Grad in y der gegebenen Gleichung bedeutet, die ganze Function im Zähler von $H(x\,y)$ höchstens von der Dimension $r-3$, vom Grade $m-2$ in x und vom Grade $n-2$ in y sein. Die allgemeinste Function $H(x\,y)$, die den obigen Be-

dingungen genügt, enthält noch ϱ willkürliche Constanten; die ϱ Functionen, welche mit denselben multiplicirt sind, genügen jede für sich den charakteristischen Eigenschaften und sind von einander linear unabhängig, man kann sie daher mit $H(x\,y)_1 \ldots H(x\,y)_\varrho$ bezeichnen. Diese Functionen $H(x\,y)_\alpha$ ($\alpha = 1,2,\ldots\varrho$) sollen jetzt für die betrachtete Gleichung $f(x,y) = 0$ wirklich hergestellt werden.

Die Function $H(x\,y)$ muss hiernach von der Form

$$H(x\,y) = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\,y + \varphi_2(x)\,y^2}{f(x,y)_2} = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\,y + \varphi_2(x)\,y^2}{4\,y\,(y^2 - P(x))}$$

sein. Jeder Stelle $(x\,y)$ des Gebildes $f(x,y) = 0$ entspricht eine Stelle $(x,-y)$, also muss auch

$$H(x,-y) = -\frac{\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\,y + \varphi_2(x)\,y^2}{4\,y\,(y^2 - P(x))}$$

die Eigenschaften einer H-Function haben und da jedes lineare homogene Aggregat von H-Functionen wieder eine solche ist, so müssen auch die Functionen

$$2\,H(x\,y) + 2\,H(x,-y) = \frac{\varphi_1(x)}{y^2 - P(x)}$$

$$2\,H(x\,y) - 2\,H(x,-y) = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}{y\,(y^2 - P(x))}$$

H-Functionen sein. Es sind demnach die ganzen Functionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ so zu bestimmen, dass jede der beiden vorstehenden Functionen für sich den obigen Bedingungen genügt.

Zunächst soll untersucht werden, wie $\varphi_1(x)$ beschaffen sein muss, damit die erste Form

$$\frac{\varphi_1(x)}{y^2 - P(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

eine H-Function darstellt. Wächst x in das Unendliche, so wird der Nenner von der 2μten Ordnung unendlich, der Bedingung für unendlich grosses x zu Folge darf also $\varphi_1(x)$ nur vom $(2\mu - 2)$ten Grade sein. Ist der endliche Werth k von den Grössen $c_\varkappa$ und $e_\varkappa$ verschieden, so ist jedenfalls

$$\left[(x-k)\,\frac{\varphi_1(x)}{y^2 - P(x)}\right]_{x=k} = 0;$$

für $x = c_\varkappa$ resp. $e_\varkappa$ aber verschwindet $y^2 - P(x)$ mit der Ordnungszahl $n_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa$ resp. $\nu_\varkappa + \frac{1}{2}\varepsilon_\varkappa$, daher muss $\varphi_1(x)$ den Factor $x - c_\varkappa$ in der $n_\varkappa$ten, den Factor $x - e_\varkappa$ in der $\nu_\varkappa$ten Potenz enthalten. Demgemäss ergiebt sich als nothwendige Form jener Function

$$\frac{\varphi_1(x)}{y^2 - P(x)} = \frac{\Pi(x-c)^n\,\Pi(x-e)^\nu}{y^2 - P(x)}\,(x)_{\tau-1},$$

wo $(x)_{\tau-1}$ eine ganze Function von x vom Grade $\tau - 1$ bedeutet und

$$\tau = 2\mu - 1 - \Sigma n - \Sigma\nu = \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma + \tfrac{1}{2}\Sigma\varepsilon - 1$$

gesetzt ist. Umgekehrt erfüllt die rechte Seite, auch wenn die τ Coefficienten in $(x)_{\tau-1}$ vollkommen willkürlich bleiben, alle Bedingungen einer H-Function, es können daher die Functionen, mit welchen die einzelnen Coefficienten in $(x)_{\tau-1}$ multiplicirt sind, gleich τ der Functionen

$H(xy)_\alpha$ gesetzt werden, d. h. es ist

$$H(xy)_\alpha = \frac{\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-c_\varkappa)^{n_\varkappa}\prod_{\varkappa=1}^{r}(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa}}{y^2-P(x)}\,x^{\alpha-1},\ (\alpha=1,2,\ldots r).$$

Da $R(x)$ kein Quadrat sein darf, so ist

$$\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon \geqq 2,$$

also

$$r \geqq 0,$$

mithin kann die Anzahl r dieser Functionen $H(xy)_\alpha$ auch Null sein. Ferner ist

$$2\,\Sigma\gamma + 2\,\Sigma\varepsilon \leqq s = 2(\varrho+3),$$

folglich

$$r \leqq \frac{\varrho+3}{2} - 1 = \frac{\varrho+1}{2};$$

für $\varrho = 2$ kann demnach höchstens eine, für $\varrho = 3$ können zwei H_α-Functionen dieser Form existiren.

Zweitens müssen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_2(x)$ so bestimmt werden, dass die Function

$$\frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}{y\,(y^2-P(x))}$$

eine H-Function wird. Wegen der Bedingung für unendlich grosses x darf $\varphi_0(x)$ nur vom $(3\mu-2)$ten und $\varphi_2(x)$ vom $(\mu-2)$ten Grade sein. Wenn k von den Grössen $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, und $e_\varkappa$ verschieden, für welche allein der Nenner verschwinden kann, ist jedenfalls die Bedingung für die H-Function erfüllt. Für $x = b_\varkappa$ ist $y^2 - P(x)$ nicht Null, dagegen werden zwei der vier zugehörigen Werthe von y von der Ordnung $m_\varkappa + \frac{1}{2}\beta_\varkappa$ Null, also enthält nothwendig $\varphi_0(x)$ den Factor $x-b_\varkappa$ in der $m_\varkappa$ten Potenz.

Für $x = c_\varkappa$ ist y von Null verschieden, aber $y^2-P(x)$ wird von der $(n_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa)$ten Ordnung Null. Daher muss die Entwickelung von $\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,P(x)$ nach $x-c_\varkappa$ mit der $n_\varkappa$ten Potenz beginnen. Die Functionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_2(x)$ müssen demgemäss das System von $n_\varkappa$ Gleichungen

$$\varphi_0^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa) + \varphi_2^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa)\,P(c_\varkappa) + (r_\varkappa)_1\,\varphi_2^{(r_\varkappa-1)}(c_\varkappa)\,P'(c_\varkappa) + (r_\varkappa)_2\,\varphi_2^{(r_\varkappa-2)}(c_\varkappa)\,P''(c_\varkappa) \qquad (I)$$
$$+\ldots+(r_\varkappa)_{r_\varkappa-1}\,\varphi'_2(c_\varkappa)\,P^{(r_\varkappa-1)}(c_\varkappa) + \varphi_2(c_\varkappa)\,P^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa) = 0,\quad (r_\varkappa = 0,1,\ldots n_\varkappa-1)$$

erfüllen. Umgekehrt wird dieses in den Coefficienten von $\varphi_0(x)$ und $\varphi_2(x)$ lineare und homogene System befriedigt, so hat die obige Function an der Stelle $c_\varkappa$ in der That die Eigenschaft einer H-Function.

Bei der Herleitung der Bedingungen dafür, dass

$$\left[(x-e_\varkappa)\frac{\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\,y^2}{y\,[y^2-P(x)]}\right]_{x=e_\varkappa} = 0$$

ist, sind zunächst verschiedene Fälle zu unterscheiden. Das Zeichen

$$\left(\frac{N}{2}\right) \text{ resp. } \left(\frac{N}{4}\right)$$

bedeute dabei im Folgenden die grösste ganze Zahl, welche der Bruch $\frac{N}{2}$ resp. $\frac{N}{4}$ enthält, also dieselbe Grösse, welche nach Legendre mit $E\left(\frac{N}{2}\right)$ resp. $E\left(\frac{N}{4}\right)$ bezeichnet zu werden pflegt. Erstens sei $\varepsilon_\varkappa = 1$; im Zähler rühren dann nur von dem Gliede $\varphi_2(x)\,(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa+\frac{1}{2}\varepsilon_\varkappa}\sqrt{R(x,e_\varkappa)}$ gebrochene Potenzen von $x-e_\varkappa$ her, daher muss $\varphi_2(x)$ den Factor $(x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}$ enthalten, mithin von der Form $(x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{2\varkappa}(x)$ sein. Für $2\lambda_\varkappa > 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ folgt nun, dass nothwendig $\varphi_0(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right)+\left(\frac{\omega_\varkappa+1}{4}\right)}\varphi_{0\varkappa}(x)$ ist; für $2\lambda_\varkappa < 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ kommt zu der Bedingung noch hinzu, dass die Entwickelung von $\varphi_{0\varkappa}(x) + \varphi_{2\varkappa}(x)\,P(x,e_\varkappa)$ nach $x-e_\varkappa$ mit der Potenz $\nu_\varkappa - \left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right) - \left(\frac{\omega_\varkappa+1}{4}\right)$ beginnen muss. Da für $2\lambda_\varkappa > 2\nu_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ $\omega_\varkappa = 2\nu_\varkappa + 1$, mithin $\nu_\varkappa - \left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right) - \left(\frac{\omega_\varkappa+1}{4}\right) = 0$ ist, so muss in beiden Fällen für $\varepsilon_\varkappa = 1$ sein

$$\varphi_0(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right)+\left(\frac{\omega_\varkappa+1}{4}\right)}\varphi_{0\varkappa}(x), \qquad \varphi_2(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{2\varkappa}(x),$$

$$\left[\frac{d^{r_\varkappa}}{dx^{r_\varkappa}}\left(\varphi_{0\varkappa}(x)+\varphi_{2\varkappa}(x)\,P(x,e_\varkappa)\right)\right]_{x=e_\varkappa} = 0, \qquad \left(r_\varkappa = 0, 1, \ldots \nu_\varkappa - \left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right) - \left(\frac{\omega_\varkappa+1}{4}\right) - 1\right).$$

Zweitens sei $\varepsilon_\varkappa = 0$, $q_\varkappa = 0$, so ist nothwendig

$$\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\left\{(x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}P(x,e_\varkappa)+(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa}\sqrt{R(x,e_\varkappa)}\right\} = (x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\mathfrak{P}_1(x-e_\varkappa)$$

$$\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\left\{(x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}P(x,e_\varkappa)-(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa}\sqrt{R(x,e_\varkappa)}\right\} = (x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\mathfrak{P}_2(x-e_\varkappa),$$

mithin

$$\varphi_2(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{2\varkappa}(x); \quad \varphi_0(x)+(x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{2\varkappa}(x)\,P(x,e_\varkappa) = (x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\mathfrak{P}(x-e_\varkappa).$$

Für $\lambda_\varkappa \geqq \nu_\varkappa$ ergiebt die letzte Bedingung $\varphi_0(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right)+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{0\varkappa}(x)$; für $\lambda_\varkappa < \nu_\varkappa$ muss ausserdem noch die Entwickelung von $\varphi_{0\varkappa}(x) + \varphi_{2\varkappa}(x)\,P(x,e_\varkappa)$ mit der Potenz $(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa-\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)-\left(\frac{\omega_\varkappa+2}{4}\right)}$ beginnen. Da aber für $\lambda_\varkappa \geqq \nu_\varkappa$ der Exponent gleich Null ist, so erhält man in beiden Fällen für $\varepsilon_\varkappa = 0$, $q_\varkappa = 0$ die Bedingungen

$$\varphi_0(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right)+\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{0\varkappa}(x), \qquad \varphi_2(x) = (x-e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{4}\right)}\varphi_{2\varkappa}(x),$$

$$\left[\frac{d^{r_x}}{dx^{r_x}}(\varphi_{0x}(x)+\varphi_{2x}(x)\,P(x,e_x)\right]_{x=e_x}=0,\quad \left(r_x=0,1,\ldots.\nu_x-\left(\frac{\omega_x}{4}\right)-\left(\frac{\omega_x+2}{4}\right)-1\right).$$

Drittens sei $\varepsilon_x=0$, $q_x>0$, so muss für den einen Werth von $\sqrt{R(x,e_x)}$

$$\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\,(x-e_x)^{\frac{\omega_x}{2}}\left\{P(x,e_x)+\sqrt{R(x,e_x)}\right\}=(x-e_x)^{\frac{\omega_x}{2}+\left(\frac{2\mu-\omega_x}{4}\right)}\mathfrak{P}_1(x-e_x)$$

$$\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\,(x-e_x)^{\frac{\omega_x}{2}}\left\{P(x,e_x)-\sqrt{R(x,e_x)}\right\}=(x-e_x)^{\frac{\omega_x}{2}+\left(\frac{\omega_x}{4}\right)}\mathfrak{P}_2(x-e_x)$$

sein. Daraus ergiebt sich als nothwendig

$$\varphi_0(x)=(x-e_x)^{\left(\frac{\omega_x}{2}\right)+\left(\frac{2\mu_x-\omega_x}{4}\right)}\varphi_{0x}(x);\qquad \varphi_2(x)=(x-e_x)^{\left(\frac{\omega_x}{4}\right)}\varphi_{2x}(x).$$

Sind in jedem dieser drei Fälle die aufgestellten Forderungen erfüllt, so hat die Function auch an der Stelle e_x die Eigenschaft einer H-Function. Dieselben lassen sich aber in die folgenden, welche für jede beliebige Stelle e_x gültig sein müssen, zusammenfassen:

$$\varphi_0(x)=(x-e_x)^{\left(\frac{\omega_x}{2}\right)+\left(\frac{2\mu_x-\omega_x+\varepsilon_x}{4}\right)}\varphi_{0x}(x);\qquad \varphi_2(x)=(x-e_x)^{\left(\frac{\omega_x}{4}\right)}\varphi_{2x}(x);$$

$$\varphi_{0x}^{(r_x)}(e_x)+\varphi_{2x}^{(r_x)}(e_x)\,P(e_x,e_x)+(r_x)_1\,\varphi_{2x}^{(r_x-1)}(e_x)\,P'(e_x,e_x)$$
$$+\ldots+\varphi_{2x}(e_x)\,P^{(r_x)}(e_x,e_x)=0,\qquad (II)$$
$$\left(r_x=0,1,\ldots\nu_x-\left(\frac{\omega_x}{4}\right)-\left(\frac{\omega_x+2-\varepsilon_x}{4}\right)-1\right).$$

Dieses Gleichungssystem ist linear und homogen in den Coefficienten der Functionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_2(x)$. Bei der vorgenommenen Transformation der Gleichung $f(x,y)=0$ ist stets $\left(\frac{\omega_x}{4}\right)=0$, diese Grösse kann daher im Folgenden stets fortgelassen werden.

Soll daher die Function $\frac{\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\,y^2}{y\,(y^2-P(x))}$ eine H-Function sein, so erhält man als hinreichende und nothwendige Bedingung

$$\frac{\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\,y^2}{y\,[y^2-P(x)]}=\frac{\Pi(x-b)^m\,\Pi(x-e)^{\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(\frac{2\mu-\omega+\varepsilon}{4}\right)}\Phi_0(x)+\Phi_2(x)\,y^2}{y\,[y^2-P(x)]}.$$

Dabei ist der Grad der Function $\Phi_0(x)$ gleich

$$3\mu-2-\Sigma m-\Sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)-\Sigma\left(\frac{2\mu-\omega+\varepsilon}{4}\right)$$

und der der Function $\Phi_2(x)$ gleich $\mu-2$. Zwischen den

$$4\mu-2-\Sigma m-\Sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)-\Sigma\left(\frac{2\mu-\omega+\varepsilon}{4}\right)$$

Coefficienten dieser beiden Functionen bestehen $n+r$ Systeme von linearen homogenen Gleichungen der Formen (I) und (II), also im Ganzen

$$\Sigma n+\Sigma\nu-\Sigma\left(\frac{\omega+2-\varepsilon}{4}\right)$$

Gleichungen. Aus denselben lassen sich so viel Coefficienten, wie Gleichungen vorhanden sind, als ganze lineare homogene Ausdrücke der übrigen Coefficienten mit gemeinsamen Nenner darstellen. Bei Einführung dieser Ausdrücke in $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$ kann der gemeinsame Nenner fortgelassen werden, da man die H-Function mit einer beliebigen Constanten multipliciren kann. Die Anzahl der in $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$ unabhängig bleibenden Coefficienten ist daher

$$\tau' = \tfrac{1}{2}(\Sigma\mu + \Sigma\beta + \Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon) - 2 - \Sigma\left(\frac{\omega}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{2\mu - \omega + \varepsilon}{4}\right) + \Sigma\left(\frac{\omega + 2 - \varepsilon}{4}\right).$$

Nun ist für jede beliebige Stelle $e_\varkappa$ stets

$$\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(\frac{2\mu - \omega + \varepsilon}{4}\right) - \left(\frac{\omega + 2 - \varepsilon}{4}\right) = \frac{\mu - \delta - \zeta}{2},$$

denn jede der beiden Seiten dieser Identität ist gleich

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{2} && \text{für } \varepsilon = 1, \quad \omega = 2 \\
&\frac{\mu - 1}{2} && \text{„ } \varepsilon = 1, \quad \omega = 1,3 \\
&\frac{\mu - 2}{2} && \text{„ } \varepsilon = 0, \quad \omega = 2, \quad \mu \equiv 0, \text{ mod } 2 \\
&\frac{\mu - 1}{2} && \text{„ } \varepsilon = 0, \quad \omega = 2, \quad \mu \equiv 1, \text{ mod } 2,
\end{aligned}$$

also ergiebt sich $\tau' = \varrho - \left\{\tfrac{1}{2}\Sigma\gamma + \tfrac{1}{2}\Sigma\varepsilon - 1\right\} = \varrho - \tau$.

Jeder Coefficient in $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$ ist mithin eine homogene lineare Function von τ' unter ihnen, die mit $C_1 \ldots C_{\tau'}$ bezeichnet werden mögen. Daher lassen sich $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$ auf die Form

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) &= f_{01}(x)\, C_1 + f_{02}(x)\, C_2 + \ldots + f_{0\tau'}(x)\, C_{\tau'} \\
\Phi_2(x) &= f_{21}(x)\, C_1 + f_{22}(x)\, C_2 + \ldots + f_{2\tau'}(x)\, C_{\tau'}
\end{aligned}$$

bringen, wo die Functionen $f_{0\alpha}(x)$ und $f_{2\alpha}(x)$ im Allgemeinen vom selben Grade sind resp. wie $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$. Es ist dann die Function

$$\frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x) y^2}{y\,[y^2 - P(x)]} = \sum_{\alpha=1}^{\tau'} C_\alpha \frac{\Pi(x-b)^m\, \Pi(x-e)^{\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(\frac{2\mu - \omega + \varepsilon}{4}\right)} f_{0\alpha}(x) + f_{2\alpha}(x)\, y^2}{y\,[y^2 - P(x)]}$$

eine H-Function und da die τ' Coefficienten C_α vollständig willkürlich sind, so kann gesetzt werden

$$H(xy)_{\tau+\alpha} = \frac{\prod_{\varkappa=1}^{m} (x - b_\varkappa)^{m_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{r} (x - e_\varkappa)^{\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right) + \left(\frac{2\mu_\varkappa - \omega_\varkappa + \varepsilon_\varkappa}{4}\right)} f_{0\alpha}(x) + f_{2\alpha}(x)\, y^2}{y\,[y^2 - P(x)]}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots\tau').$$

Es giebt also τ' Functionen $H(xy)_\alpha$ dieser Form und da $\tau + \tau' = \varrho$ ist, so sind die ϱ Functionen $H(xy)_\alpha$ für das betrachtete Gebilde sämmtlich hergestellt.

6.

Um eine beliebige algebraische Gleichung $F(x,y) = 0$ durch die rationalen Substitutionen

$$x = P(\xi\,\eta), \quad y = Q(\xi\,\eta),$$

aus denen durch Auflösung nach ξ,η die ebenfalls rationalen Functionen

$$\xi = P_1(x\,y), \quad \eta = Q_1(x\,y)$$

hervorgehen mögen, in eine Gleichung zwischen ξ und η zu transformiren, welche η in der νten und keiner höheren Potenz enthält, muss nothwendig $P_1(x\,y)$ eine Function νten Grades sein. Denn ist die Gleichung zwischen ξ und η in η vom νten Grade, so entsprechen einem Werth ξ ν im Allgemeinen verschiedene Werthe η und da aus einem Werthepaar $(\xi\,\eta)$ nur ein Werthepaar $(x\,y)$ hervorgeht, so gehören zu einem Werthe ξ ν Werthepaare $(x\,y)$, d. h. es ist ξ eine Function νten Grades des Paares $(x\,y)$. — Eliminirt man sodann y aus der gegebenen Gleichung $F(x,y) = 0$ und aus $\xi = P_1(x\,y)$, so erhält man eine Gleichung zwischen x und ξ, die in x vom νten Grade ist; dieselbe ist entweder irreducibel, oder ihre linke Seite ist Potenz einer unzerlegbaren Function.

Soll sich daher eine Gleichung $f(x,y) = 0$ in eine Gleichung zwischen ξ und η überführen lassen, die in η vom zweiten Grade ist, so ist nothwendig, dass für $f(x,y) = 0$ eine Function zweiten Grades existirt.

Es wurde schon erwähnt, dass für $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$ jede Gleichung auf die Normalform $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ durch eine eindeutige Substitution gebracht werden kann und zwar ist für $\varrho = 1$ $\Xi(\xi)$ eine ganze Function dritten oder vierten, für $\varrho = 2$ eine ganze Function fünften oder sechsten Grades. Für $\varrho \geqq 3$ lässt sich dagegen im Allgemeinen eine algebraische Gleichung nicht mehr auf jene Form reduciren; doch wird gezeigt werden, dass für jeden beliebigen Rang die hier betrachtete Gleichung $f(x,y) = 0$, falls für dieselbe $\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 2$ ist, stets in die Gleichung $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ transformirt werden kann.

7.

Es werde jetzt eine Gleichung $f(x,y) = 0$ von beliebigem Range ϱ betrachtet, für welche

$$\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 2,$$

mithin

$$\Sigma\beta + \Sigma(\delta + \zeta) = s - 4 = 2\varrho + 2$$

ist. Wird mit $r(x)$ die Function $(2\mu - 1)$ten Grades

$$r(x) = \sqrt{c}\ \Pi(x - c)^{\eta}\ \Pi(x - e)^{\nu}$$

bezeichnet, so ergiebt sich

$$R(x) = r(x)^2 (x - d_1)(x - d_2),$$

wo die Grössen d_1 und d_2 mit den beiden Grössen $c_\varkappa$ und $e_\varkappa$, für welche resp. $\gamma_\varkappa = 1$ und $\varepsilon_\varkappa = 1$ ist, identisch sind. Dann soll bewiesen werden, dass die rationale Function des Paares $(x\,y)$

$$\frac{r(x)(x - d_2)}{y^2 - P(x)} = \frac{r(x)(x - d_2)}{\sqrt{R(x)}} = \sqrt{\frac{x - d_2}{x - d_1}}$$

eine Function zweiten Grades ist.

Für unendlich grosses x bleibt die Function endlich, im Endlichen kann sie nur für $x = d_1$ unendlich werden. Ist nun die Grösse d_1 mit einer Stelle $c_\varkappa$ identisch, so existiren für dieselbe die beiden Functionenpaare

$$x_t = c_\varkappa + R(c_\varkappa, c_\varkappa)t^2, \qquad y_t = +\sqrt{P(c_\varkappa)}\,\{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\}$$

$$x_t = c_\varkappa + R(c_\varkappa, c_\varkappa)t^2, \qquad y_t = -\sqrt{P(c_\varkappa)}\,\{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\}$$

und man hat für jedes derselben

$$\frac{r(x_t)\,(x_t - d_2)}{y_t^2 - P(x_t)} = \frac{t^{-1}}{r(c_\varkappa, c_\varkappa)} + t\,\mathfrak{P}(t^2),$$

wobei $r(x) = (x - c_\varkappa)^{n_\varkappa} r(x, c_\varkappa)$ gesetzt ist. In diesem Falle wird also die Function für zwei Paare $(x_t\, y_t)$ und zwar für jedes von der ersten Ordnung unendlich, d. h. aber die Function ist vom zweiten Grade. Genau dasselbe gilt, wenn die Grösse d_1 mit einer Grösse $e_\varkappa$ übereinstimmt, für welche $\omega_\varkappa$ gerade ist, da dann für dieselbe zwei Paare derselben Form, wie vorher, bestehen. Ist schliesslich d_1 gleich einer Stelle $e_\varkappa$, für die $\omega_\varkappa$ ungerade, so giebt es nur das einzige Functionenpaar

$$x_t = e_\varkappa + C^2 R(e_\varkappa, e_\varkappa)t^4, \quad y_t = C^{\frac{\omega_\varkappa + 1}{2}} t^{\omega_\varkappa}\,\{1 + t^2\,\mathfrak{P}(t^2)\},$$

für welches

$$\frac{r(x_t)\,(x_t - d_2)}{y_t^2 - P(x_t)} = \frac{t^{-2}}{C r(e_\varkappa, e_\varkappa)} + t^2\,\mathfrak{P}(t^4)$$

wird, wenn man $r(x, e_\varkappa)$ analog $r(x, c_\varkappa)$ definirt. Die Function wird also in diesem Falle nur für ein einziges Functionenpaar, aber von der zweiten Ordnung unendlich, sie ist folglich auch dann vom zweiten Grade.

Setzt man daher

$$\xi = \frac{r(x)\,(x - d_2)}{y^2 - P(x)}$$

und eliminirt y hieraus und aus der Gleichung $f(x, y) = 0$, so ergiebt sich zwischen x und ξ eine Gleichung, die in x vom zweiten Grade sein muss. In der That bezeichnet man mit y_1, y_2, y_3, y_4 die vier Werthe von y, welche zu einem Werthe von x gehören, so wird das Eliminationsresultat

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=4}\left(\xi - \frac{r(x)\,(x - d_2)}{y_\nu^2 - P(x)}\right) = \left(\xi^2 - \frac{x - d_2}{x - d_1}\right)^2 = 0.$$

Die Eliminationsresultante ist demnach das Quadrat einer linearen Function von x. Dieselbe giebt

$$x = \frac{d_1\,\xi^2 - d_2}{\xi^2 - 1}, \quad x - d_1 = \frac{d_1 - d_2}{\xi^2 - 1}, \quad x - d_2 = \frac{d_1 - d_2}{\xi^2 - 1}\,\xi^2,$$

mithin folgt

$$P(x) = a\,\frac{\prod_{x=1}^{l}\left\{(d_1-a_x)\,\xi^2-(d_2-a_x)\right\}^{l_x}\quad\prod_{x=1}^{r}\left\{(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)\right\}^{\lambda_x}}{(\xi^2-1)^{2\mu}} = \frac{\mathfrak{P}(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu}}$$

$$Q(x) = b\,\frac{\prod_{x=1}^{m}\left\{(d_1-b_x)\,\xi^2-(d_2-b_x)\right\}^{2m_x+\beta_x}\prod_{x=1}^{r}\left\{(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)\right\}^{\mu_x}}{(\xi^2-1)^{4\mu}} = \frac{\mathfrak{Q}(\xi)}{(\xi^2-1)^{4\mu}}$$

$$r(x) = \sqrt{c}\,\frac{\prod_{x=1}^{n}\left\{(d_1-c_x)\,\xi^2-(d_2-c_x)\right\}^{n_x}\quad\prod_{x=1}^{r}\left\{(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)\right\}^{\nu_x}}{(\xi^2-1)^{2\mu-1}} = \frac{\mathfrak{R}(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu-1}}.$$

Wird für $d_1 = c_x$ $\lambda' = 0$, $\mu' = 0$, $\nu' = n_x$ und für $d_1 = e_x$ $\lambda' = \lambda_x$, $\mu' = \mu_x$, $\nu' = \nu_x$ gesetzt, so sind die Functionen $\mathfrak{P}(\xi)$, $\mathfrak{Q}(\xi)$, $\mathfrak{R}(\xi)$ resp. vom Grade $4\mu-2\lambda'$, $8\mu-2\mu'$, $4\mu-2-2\nu'$. Hieraus ergiebt sich

$$y^2 = P(x) + \frac{r(x)\,(x-d_2)}{\xi} = \frac{\mathfrak{P}(\xi) + (d_1-d_2)\,\xi\,\mathfrak{R}(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu}} = \frac{\mathfrak{K}(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu}},$$

wo $\mathfrak{K}(\xi)$ eine ganze Function vom Grade $4\mu-\omega'$ ist, wenn ω' die kleinere der Zahlen $2\lambda'$ und $2\nu'+1$ bedeutet.

Von dieser Function $\mathfrak{K}(\xi)$ sollen jetzt diejenigen Linearfactoren, die nicht in gerader Potenz vorkommen, ermittelt werden. Zu Folge der Gleichung

$$\mathfrak{Q}(\xi) = \mathfrak{P}^2(\xi) - (d_1-d_2)^2\,\xi^2\,\mathfrak{R}^2(\xi) = \mathfrak{K}(\xi)\,\{2\,\mathfrak{P}(\xi) - \mathfrak{K}(\xi)\}$$

müssen die Linearfactoren von $\mathfrak{K}(\xi)$ sämmtlich unter denen von $\mathfrak{Q}(\xi)$ enthalten sein. In $\mathfrak{K}(\xi)$ kann kein quadratischer Factor $(d_1-b_x)\,\xi^2-(d_2-b_x)$ vorkommen, denn sonst wäre

$$\frac{\mathfrak{K}(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu}} = P(x) + \frac{r(x)\,(x-d_2)}{\xi}$$

durch $x-b_x$ theilbar und da ξ eine irrationale Function von x ist, so müsste sowohl $P(x)$, wie $r(x)$ den Theiler $x-b_x$ enthalten. Also ist stets der eine Linearfactor von $(d_1-b_x)\,\xi^2-(d_2-b_x)$ ein Theiler von $\mathfrak{K}(\xi)$, der andere von $2\,\mathfrak{P}(\xi) - \mathfrak{K}(\xi)$ und zwar in der $(2m_x+\beta_x)$ten Potenz. — Jeder quadratische Factor $(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)$, $(d_1, d_2 \gtrless e_x)$ ist in $\mathfrak{K}(\xi)$ und in $2\,\mathfrak{P}(\xi) - \mathfrak{K}(\xi)$ in der $\frac{\omega_x}{2}$ten Potenz enthalten, denn in $\mathfrak{P}(\xi)$ kommt derselbe in der $\lambda_x$ten und in $\mathfrak{R}(\xi)$ in der $\nu_x$ten Potenz vor. Wird

$$\mathfrak{K}(\xi) = \{(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)\}^{\frac{\omega_x}{2}}\,\mathfrak{K}(\xi,e_x);\quad 2\mathfrak{P}(\xi)-\mathfrak{K}(\xi) = \{d_1-e_x)\xi^2-(d_2-e_x)\}^{\frac{\omega_x}{2}}\,\{2\mathfrak{P}(\xi,e_x)-\mathfrak{K}(\xi,e_x)\}$$

gesetzt, so hat das Product

$$\mathfrak{K}(\xi,e_x)\,\{2\,\mathfrak{P}(\xi,e_x) - \mathfrak{K}(\xi,e_x)\}$$

den quadratischen Factor $[(d_1-e_x)\,\xi^2-(d_2-e_x)]$ noch $q_x$mal, da $\mathfrak{Q}(\xi)$ denselben in der (ω_x+q_x)ten gleich $\mu_x$ten Potenz enthält. $\mathfrak{K}(\xi,e_x)$ kann aber durch jenen quadratischen Factor nicht theilbar sein, denn es wäre sonst $x-e_x$ Theiler von

$$\frac{\mathfrak{K}(\xi, e_\varkappa)}{(\xi^2-1)^{2\mu-\frac{\omega_\varkappa}{2}}} = P(x, e_\varkappa)\,(x-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa-\frac{\omega_\varkappa}{2}} + \frac{r(x, e_\varkappa)\;(x-e_\varkappa)^{\nu_\varkappa-\frac{\omega_\varkappa}{2}}(x-d_2)}{\xi},$$

was nicht möglich ist. Es kommt also der eine Linearfactor von $(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2-(d_2-e_\varkappa)$ in $\mathfrak{K}(\xi, e_\varkappa)$, der andere in $2\,\mathfrak{P}(\xi, e_\varkappa)-\mathfrak{K}(\xi, e_\varkappa)$ und zwar in der $q_\varkappa$ten gleich $(\mu_\varkappa-\omega_\varkappa)$ten Potenz vor. — Ist $d_2=e_\varkappa$, so hat $\mathfrak{P}(\xi)$ den Factor $(d_1-e_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}\,\xi^{2\lambda_\varkappa}$, $(d_1-e_\varkappa)\,\xi\,\mathfrak{R}(\xi)$ den Factor $\xi^{2\nu_\varkappa+1}\,(d_1-e_\varkappa)^{\frac{2\nu_\varkappa+1}{2}}$, also enthält $\mathfrak{K}(\xi)$ die $\frac{\omega_\varkappa}{2}$te Potenz von $(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2$ und keine höhere. — Für $d_2=e_\varkappa$ wird der dem Factor $x-e_\varkappa$ von $\mathfrak{Q}(x)$ entsprechende Theiler von $\mathfrak{K}(\xi)$ die Constante $(d_1-e_\varkappa)^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}$. — Daher wird

$$\mathfrak{K}(\xi)=\mathfrak{k}\prod_{\varkappa=1}^{m}[\sqrt{d_1-b_\varkappa}\,\xi+\sqrt{d_2-b_\varkappa}]^{2m_\varkappa+\beta_\varkappa}\prod_{\varkappa=1}^{r}\{[(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2-(d_2-e_\varkappa)]^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}\,[\sqrt{d_1-e_\varkappa}\,\xi+\sqrt{d_2-e_\varkappa}]^{\mu_\varkappa-\omega_\varkappa}\}.$$

Das Product

$$[(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2-(d_2-e_\varkappa)]^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}\,[\sqrt{d_1-e_\varkappa}\,\xi+\sqrt{d_2-e_\varkappa}]^{\mu_\varkappa-\omega_\varkappa}$$

ist für $d_1,\ d_2 \gtrless e_\varkappa$ gleich dem Quadrate einer ganzen Function von ξ multiplicirt mit einer Function $(\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa)$ten Grades von ξ, die kein Quadrat ist. Denn für die hier in Betracht kommenden Stellen ist $\varepsilon_\varkappa=0$, mithin $\omega_\varkappa=2$. Ist nun $\mu_\varkappa-\omega_\varkappa$ gerade, so wird $\frac{\omega_\varkappa}{2}=\frac{\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa}{2}$ und $[(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2-(d_2-e_\varkappa)]^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}$ ist eine Function $(\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa)$ten Grades von ξ, die kein Quadrat ist. Für ungerades $\mu_\varkappa-\omega_\varkappa$ ist $\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa=1$ und es hat das Product wegen der Relation

$$[(d_1-e_\varkappa)\,\xi^2-(d_2-e_\varkappa)]\,[\sqrt{d_1-e_\varkappa}\,\xi+\sqrt{d_2-e_\varkappa}]=[\sqrt{d_1-e_\varkappa}\,\xi+\sqrt{d_2-e_\varkappa}]^2\,[\sqrt{d_1-e_\varkappa}\,\xi-\sqrt{d_2-e_\varkappa}]$$

ebenfalls die verlangte Form. — Für $d_2=e_\varkappa$ ist $\varepsilon_\varkappa=1$, $\omega_\varkappa\equiv\delta_\varkappa=\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa$, mod 2 und daher das obige Product gleich

$$(d_1-e_\varkappa)^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}\,\xi^{\omega_\varkappa}=(d_1-e_\varkappa)^{\frac{\omega_\varkappa}{2}}\,(\xi^2)^{\frac{\omega_\varkappa-\delta_\varkappa}{2}}\,\xi^{\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa},$$

also auch von jener Gestalt. — Ist $d_1=e_\varkappa$, so ist das Product eine Constante, während $\delta_\varkappa+\zeta_\varkappa=0$ oder 1, je nachdem $\omega_\varkappa$ gerade oder ungerade ist.

Demnach ergiebt sich, dass $\mathfrak{K}(\xi)$ von der Form

$$\mathfrak{K}(\xi)=K(\xi)^2\,\Xi(\xi)$$

wird, wo $\Xi(\xi)$ eine ganze Function von ξ mit lauter verschiedenen Linearfactoren darstellt vom Grade $\Sigma\beta+\Sigma(\delta+\zeta)=2\varrho+2$ oder vom Grade $\Sigma\beta+\Sigma(\delta+\zeta)-1=2\varrho+1$. Das Letztere tritt nur ein, wenn d_1 gleich einer Stelle $e_\varkappa$ ist, für die $\omega_\varkappa$ ungerade. Dabei sind die

Functionen $K(\xi)$ und $\Xi(\xi)$ vollständig bekannt. Aus der obigen Gleichung für y^2 folgt daher

$$y^2 = \frac{K(\xi)^2 \Xi(\xi)}{(\xi^2-1)^{2\mu}}$$

und setzt man

$$y = \frac{K(\xi)}{(\xi^2-1)^{\mu}} \eta,$$

so ergiebt sich

$$\eta^2 - \Xi(\xi) = 0.$$

Damit ist bewiesen, dass sich jede beliebige Gleichung $f(x,y) = 0$, für welche $\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 2$ ist, durch die eindeutigen Substitutionen

$$x = \frac{d_1 \xi^2 - d_2}{\xi^2 - 1}, \quad y = \frac{K(\xi)}{(\xi^2-1)^{\mu}} \eta,$$

aus denen umgekehrt folgt

$$\xi = \frac{r(x)(x-d_2)}{y^2 - P(x)}, \quad \eta = \left(\frac{d_1 - d_2}{x - d_1}\right)^{\mu} \frac{y}{K\left(\frac{r(x)(x-d_2)}{y^2-P(x)}\right)},$$

auf die Normalform $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ transformiren lässt. In der That hat sich der Rang der Gleichung bei dieser eindeutigen Transformation nicht geändert, denn damit die Gleichung $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ vom Range ϱ ist, muss $\Xi(\xi)$ vom Grade $2\varrho + 1$ oder $2\varrho + 2$ sein, was wirklich stattfindet.

8.

Im Vorhergehenden sind für $\varrho = 1$ Gleichungen $f(x,y) = 0$, bei welchen

$$\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 4, \quad \Sigma\beta + \Sigma(\delta + \zeta) = 0$$

ist, noch nicht enthalten. Da dann für alle Stellen $e_\varkappa$ der Gleichung $f(x,y) = 0$ $\delta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa = 0$ sein müssen, so giebt es nur Stellen $e_\varkappa$, für welche $\varepsilon_\varkappa = 1$, $\omega_\varkappa = \mu_\varkappa = 2$, $\lambda_\varkappa = 1$, $\nu_\varkappa \geqq 1$ ist. Solcher Stellen $e_\varkappa$ mögen α vorkommen, es ist dann

$$\Sigma\mu = 2\alpha, \quad \Sigma\gamma + \alpha = 4.$$

Die Function $Q(x)$ ist daher ein Quadrat.

Bezeichnet $r(x)$ dieselbe Function, wie vorher, wobei aber jetzt $r(x)$ vom $(2\mu - 2)$ten Grade ist, so kann

$$R(x) = r(x)^2 (x - d_1)(x - d_2)(x - d_3)(x - d_4)$$

gesetzt werden. Die Grössen d_1, d_2, d_3, d_4 stimmen dabei mit den vier verschiedenen der Grössen $c_\varkappa$ und $e_\varkappa$ überein, für welche resp. $\gamma_\varkappa = 1$ und $\varepsilon_\varkappa = 1$ ist. Die Coefficienten in den ganzen Functionen $\psi_0(x)$ und $\psi_2(x)$ sind nun so zu bestimmen, dass die rationale Function des Paares $(x\,y)$

$$\frac{\psi_0(x) + \psi_2(x) y^2}{y\, r(x)(x-k)},$$

bei der k eine beliebige endliche von $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, $e_\varkappa$ verschiedene Grösse bedeutet, eine Function zweiten Grades ist.

Für unendlich grosses x wird der Nenner von der $(3\mu-1)$ten Ordnung unendlich, soll also die Function alsdann endlich bleiben, so darf $\psi_0(x)$ nur vom $(3\mu-1)$ten und $\psi_2(x)$ vom $(\mu-1)$ten Grade sein. Damit die Function für $x=b_\varkappa$ nicht unendlich wird, muss $\psi_0(x)$ den Factor $(x-b_\varkappa)^{m_\varkappa}$ enthalten. Für jede Stelle $c_\varkappa$ verschwindet der Nenner mit der Ordnungszahl $n_\varkappa$, es muss also auch der Zähler

$$\psi_0(x)+\psi_2(x)\,y^2=\psi_0(x)+\psi_2(x)\,P(x)+\psi_2(x)\,r(x)\sqrt{(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)}$$

durch $(x-c_\varkappa)^{n_\varkappa}$ theilbar sein, d. h. für jede solche Stelle $c_\varkappa$ besteht nothwendig das folgende System von $n_\varkappa$ in den Coefficienten von $\psi_0(x)$ und $\psi_2(x)$ linearen und homogenen Gleichungen

$$\psi_0^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa)+\psi_2^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa)\,P(c_\varkappa)+(r_\varkappa)_1\,\psi_2^{(r_\varkappa-1)}(c_\varkappa)\,P'(c_\varkappa)+\ldots+\psi_2(c_\varkappa)\,P^{(r_\varkappa)}(c_\varkappa)=0,$$
$$(r_\varkappa=0,1,\ldots n_\varkappa-1).$$

Damit ferner die Function

$$\frac{\psi_0(x)+\psi_2(x)\,y^2}{y\,r(x)\,(x-k)}$$

für eine Stelle $e_\varkappa$ nicht unendlich wird, sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\psi_0(x)=(x-e_\varkappa)\,\psi_{0\varkappa}(x)$$
$$\psi_{0\varkappa}^{(r_\varkappa)}(e_\varkappa)+\psi_2^{(r_\varkappa)}(e_\varkappa)\,P(e_\varkappa,e_\varkappa)+(r_\varkappa)_1\,\psi_2^{(r_\varkappa-1)}(e_\varkappa)\,P'(e_\varkappa,e_\varkappa)$$
$$+\ldots\psi_2(e_\varkappa)\,P^{(r_\varkappa)}(e_\varkappa,e_\varkappa)=0,\ (r_\varkappa=0,1,\ldots\nu_\varkappa-1).$$

Diese Gleichungen sind ebenfalls linear und homogen in den Coefficienten der Functionen $\psi_0(x)$ und $\psi_2(x)$. — Soll schliesslich auch die Function an den beiden Stellen

$$\left(k,+\sqrt{P(k)-\sqrt{R(k)}}\right)\text{ und }\left(k,-\sqrt{P(k)-\sqrt{R(k)}}\right)$$

endlich bleiben, so muss sein

$$\psi_0(k)+\psi_2(k)\left\{P(k)-\sqrt{R(k)}\right\}=0.$$

Sind die beiden Functionen $\psi_0(x)$ und $\psi_2(x)$ der Art bestimmt, dass den aufgestellten Bedingungen sämmtlich genügt wird, so wird die Function

$$\frac{\psi_0(x)+\psi_2(x)\,y^2}{y\,r(x)\,(x-k)}$$

nur an den beiden Stellen $\left(k,+\sqrt{P(k)+\sqrt{R(k)}}\right)$ und $\left(k,-\sqrt{P(k)+\sqrt{R(k)}}\right)$ von der ersten Ordnung unendlich, sie ist mithin dann eine Function zweiten Grades. Diese Bedingungen sind aber stets zu erfüllen. Denn es muss sein

$$\psi_0(x)=\Pi(x-b)^m\ \Pi(x-e)\ \overline{\psi}_0(x),$$

wo $\overline{\psi}_0(x)$ und $\psi_2(x)$ noch

$$4\mu-\Sigma m-\alpha=2\mu$$

Coefficienten enthalten, deren Verhältnisse zu bestimmen sind. Diese Coefficienten müssen aber

$$\Sigma n+\Sigma\nu+1=2\mu-1$$

linearen homogenen Gleichungen genügen, mithin einer solchen Gleichung weniger, als Coefficienten vorhanden sind. Die Verhältnisse der Coefficienten lassen sich daher in der That aus den Gleichungen vollkommen bestimmen. Durch Fixirung eines der Coefficienten sind dann auch die übrigen eindeutig gegeben. Die Coefficienten der höchsten Potenzen $x^{3\mu-1}$ und $x^{\mu-1}$ in

$\psi_0(x)$ und $\psi_2(x)$ mögen resp. mit p_0 und p_2 bezeichnet werden. — Bei Lösung der Gleichungen kann nicht der Fall eintreten, dass $\psi_0(k)$ und $\psi_2(k)$ selbst gleich Null werden, denn die Function würde sonst auch nicht an den Stellen $\left(k, +\sqrt{P(k) + \sqrt{R(k)}}\right)$ und $\left(k, -\sqrt{P(k) + \sqrt{R(k)}}\right)$, also an keiner einzigen Stelle unendlich, sie wäre demnach eine Constante.

Wird nun

$$\xi = \frac{\psi_0(x) + \psi_2(x)\, y^2}{y\, r(x)\, (x-k)}$$

gesetzt, so ergiebt sich durch Elimination von y aus dieser Gleichung und der Gleichung $f(x,y) = 0$

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=4} \left(\xi - \frac{\psi_0(x) + \psi_2(x)\, y_\nu^2}{y_\nu\, r(x)\, (x-k)} \right)$$

$$= \xi^4 - 2\frac{\psi_0^2(x)P(x) + 2\psi_0(x)\psi_2(x)Q(x) + \psi_2^2(x)P(x)Q(x)}{Q(x)\, r(x)^2\, (x-k)^2}\xi^2 + \frac{[\psi_0^2(x) + 2\psi_0(x)\psi_2(x)P(x) + \psi_2^2(x)Q(x)]^2}{Q(x)\, r(x)^4\, (x-k)^4} = 0.$$

Da ξ eine Function zweiten Grades des Paares $(x\, y)$ ist, so ist diese Eliminationsgleichung zwischen x und ξ in x vom zweiten Grade. Dies lässt sich auch a posteriori zeigen. Denn man hat

$$\sqrt{Q}\,(x)\, r(x)^2\, (x-k)^2 = c\sqrt{b}\; \Pi(x-b)^m\; \Pi(x-c)^{2n}\; \Pi(x-e)^{2\nu+1}\; (x-k)^2$$

$$Q(x)\, r(x)^2\, (x-k)^2 = c\, b\;\; \Pi(x-b)^{2m}\; \Pi(x-c)^{2n}\; \Pi(x-e)^{2\nu+2}\; (x-k)^2$$

$$\psi_0^2(x) + 2\,\psi_0(x)\,\psi_2(x)\,P(x) + \psi_2^2(x)\,Q(x) = \left\{\psi_0(x) + \psi_2(x)\,P(x)\right\}^2 - \psi_2^2(x)\,R(x)$$

$$= C_2\, c\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\;\Pi(x-c)^{2n}\;\Pi(x-e)^{2\nu+1}\;(x-k)\;(x-h)$$

$$\psi_0^2(x)P(x) + 2\psi_0(x)\psi_2(x)Q(x) + \psi_2^2(x)P(x)Q(x) = \left[\left\{\psi_0(x) + \psi_2(x)P(x)\right\}^2 - \psi_2^2(x)R(x)\right]P(x) - 2\psi_0(x)\psi_2(x)R(x)$$

$$= C_1\, c\, b\;\; \Pi(x-b)^{2m}\; \Pi(x-c)^{2n}\; \Pi(x-e)^{2\nu+2}\; (x-g_1)\; (x-g_2).$$

Falls

$$p_0^2 + 2\,p_0\,p_2\,a + p_2^2\,b = 0,$$

so erniedrigt sich der Grad der vorletzten Function auf der linken Seite und es fällt daher der Linearfactor $x-h$ ganz fort. Diesen speciellen Fall kann man sich aus dem allgemeinen so entstanden denken, dass in dem letzteren h gegen die übrigen Grössen unendlich gross wird, doch dabei $C_2\, h$ endlich bleibt. — Auch in der letzten Function vermindert sich in dem speciellen Falle

$$p_0^2\, a + 2\,p_0\,p_2\,b + p_2^2\,ab = 0$$

der Grad, so dass einer oder beide Factoren $x-g$ wegfallen. Man erhält denselben aus dem allgemeinen, indem man g_2, resp. g_1 und g_2 unendlich gross, $C_1\, g_2$ resp. $C_1\, g_1\, g_2$ aber endlich annimmt. Gleichzeitig kann vorher der Factor $x-h$ und hier ein Factor $x-g$ nicht fortbleiben, denn es müsste sonst $a^2 - b = c = 0$ sein.

Die Grössen g_1 und g_2 sind beide von k verschieden, denn sonst wäre gleichzeitig

$$\psi_0^2(k) + 2\,\psi_0(k)\,\psi_2(k)\,P(k) + \psi_2^2(k)\,Q(k) = 0$$

$$\psi_0^2(k)\,P(k) + 2\,\psi_0(k)\,\psi_2(k)\,Q(k) + \psi_2^2(k)\,P(k)\,Q(k) = 0,$$

d. h.

$$\psi_0(k) = 0\,, \qquad \psi_2(k) = 0\,,$$

was nicht der Fall ist.

Demnach ergiebt sich zwischen x und ξ die Gleichung

$$\xi^4 - 2\,C_1\,\frac{(x-g_1)\,(x-g_2)}{(x-k)^2}\,\xi^2 + C_2^2\,\frac{(x-h)^2}{(x-k)^2} = \xi^4 + \frac{\chi_1(x)}{\chi_0(x)}\,\xi^2 + \frac{\chi_2(x)}{\chi_0(x)} = 0.$$

Diese Gleichung ist jedenfalls irreducibel, denn es müsste sonst eine der Grössen g_1 oder g_2 gleich k sein. Daraus folgt

$$x^2(\xi^4 - 2C_1\xi^2 + C_2^2) - 2x(k\xi^4 - C_1(g_1+g_2)\xi^2 + C_2^2 h) + k^2\xi^4 - 2C_1 g_1 g_2 \xi^2 + C_2^2 h^2 = 0,$$

$$x = \frac{k\xi^4 - C_1(g_1+g_2)\xi^2 + C_2^2 h + \xi\sqrt{2C_1(k-g_1)(k-g_2)\xi^4 + [(g_1-g_2)^2 C_1^2 - (k-h)^2 C_2^2]\xi^2 + 2C_1 C_2^2 (h-g_1)(h-g_2)}}{\xi^4 - 2C_1\xi^2 + C_2^2}.$$

Durch die Substitution

$$\eta^2 = 2C_1(k-g_1)(k-g_2)\xi^4 + [C_1^2(g_1-g_2)^2 - C_2^2(k-h)^2]\xi^2 + 2C_1 C_2^2 (h-g_1)(h-g_2)$$

ergiebt sich daher

$$x = \frac{k\xi^4 - C_1(g_1+g_2)\xi^2 + C_2^2 h + \xi\eta}{\xi^4 - 2C_1\xi^2 + C_2^2}$$

$$\xi\eta = \frac{\chi_0'(x)\xi^4 + \chi_1'(x)\xi^2 + \chi_2'(x)}{2}$$

$$= \frac{[\chi_0(x)\chi_1'(x) - \chi_1(x)\chi_0'(x)][\psi_0(x) + \psi_2(x)y^2]^2 + [\chi_0(x)\chi_2'(x) - \chi_2(x)\chi_0'(x)]r(x)^2(x-k)^2 y^2}{2\chi_0(x)r(x)^2(x-k)^2 y^2}$$

und mit Hülfe der Relation

$$y^4 = 2P(x)y^2 - Q(x)$$

lässt sich $\xi\eta$ auf die Form

$$\xi\eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)y^2}{X(x)y^2}$$

bringen. Daraus folgt

$$\eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)y^2}{\psi_0(x) + \psi_2(x)y^2} \cdot \frac{1}{2\chi_0(x)r(x)(x-k)y}.$$

Aus den Ausdrücken für ξ und $\xi\eta$ erhält man

$$y = \frac{\psi_0(x) + \psi_2(x)y^2}{\xi r(x)(x-k)}, \qquad y^2 = \frac{X_0(x)}{X(x)\xi\eta - X_2(x)}$$

und durch Substitution des letzteren Werthes in den ersteren

$$y = \frac{\psi_2(x)X_0(x) - \psi_0(x)X_2(x) + \psi_0(x)X(x)\xi\eta}{\xi r(x)(x-k)[X(x)\xi\eta - X_2(x)]}.$$

Führt man hier statt x den obigen Werth in ξ und η ein, so wird y eine rationale Function von $(\xi\eta)$, die sich zu Folge der Relation zwischen ξ und η auf die Form

$$y = \frac{\Psi_0(\xi) + \Psi_1(\xi)\eta}{\Psi(\xi)}$$

bringen lässt.

Auch in dem vorliegendeu Falle für $\varrho = 1$ sind also eindeutige Substitutionen

$$x = \frac{k\xi^4 - C_1(g_1+g_2)\xi^2 + C_2^2 h + \xi\eta}{\xi^4 - 2C_1\xi^2 + C_2^2}, \qquad y = \frac{\Psi_0(\xi) + \Psi_1(\xi)\eta}{\Psi(\xi)}$$

$$\xi = \frac{\psi_0(\xi) + \psi_2(\xi)y^2}{y\,r(x)(x-k)}, \qquad \eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)y^2}{\psi_0(x) + \psi_2(x)y^2} \cdot \frac{1}{2\chi_0(x)r(x)(x-k)y}$$

gefunden, durch welche sich $f(x,y) = 0$ in die Normalform

$$\eta^2 - 2C_1(k-g_1)(k-g_2)\xi^4 - [C_1^2(g_1-g_2)^2 - C_2^2(k-h)^2]\xi^2 - 2C_1 C_2^2(h-g_1)(h-g_2) = 0$$

überführen lässt.

9.

Für $\varrho = 2$ bleibt nur noch der Fall

$$\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 4, \quad \Sigma\beta + \Sigma(\delta + \zeta) = 2$$

zu untersuchen übrig. Für denselben haben die beiden Functionen $H(x\,y)_1$ und $H(x\,y)_2$ die Form

$$H(x\,y)_1 = \frac{\varphi_1(x)}{y^2 - P(x)}, \qquad H(x\,y)_2 = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}{y\,[y^2 - P(x)]};$$

die Coefficienten der höchsten Potenzen $x^{3\mu-2}$ und $x^{\mu-2}$ in $\varphi_0(x)$ und $\varphi_2(x)$ mögen resp. mit p_0 und p_2 bezeichnet werden.

Der Quotient der beiden Functionen $H(x\,y)_\alpha$ ist nun für $\varrho = 2$ stets eine Function zweiten Grades; es ist daher für diesen Fall

$$\xi = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}{\varphi_1(x)\,y}$$

eine Function zweiten Grades. Die Elimination von y hieraus und aus $f(x,y) = 0$ giebt

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=4}\left\{\xi - \frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y_\nu^2}{\varphi_1(x)\,y_\nu}\right\}$$

$$= \xi^4 - 2\frac{\varphi_0^2(x)P(x) + 2\varphi_0(x)\varphi_2(x)Q(x) + \varphi_2^2(x)P(x)Q(x)}{\varphi_1^2(x)\,Q(x)}\xi^2 + \frac{[\varphi_0^2(x) + 2\varphi_0(x)\varphi_2(x)P(x) + \varphi_2^2(x)Q(x)]^2}{\varphi_1^4(x)\,Q(x)} = 0.$$

Diese Gleichung zwischen x und ξ muss in x vom zweiten Grade sein. Aus den Eigenschaften der Functionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ lässt sich dies auch direkt beweisen. Zähler und Nenner des Coefficienten von ξ^2 sind vom $(8\mu - 4)$ten Grade und des von ξ freien Gliedes vom $(12\mu - 8)$ten Grade in x. In Linearfactoren zerlegt wird

$$\varphi_1^2(x)\,Q(x) = b\,\Pi(x-b)^{2m+\beta}\,\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu+\mu}$$

$$\varphi_1^4(x)\,Q(x) = b\,\Pi(x-b)^{2m+\beta}\,\Pi(x-c)^{4n}\,\Pi(x-e)^{4\nu+\mu}.$$

Die Function

$$\varphi_0^2(x) + 2\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\,P(x) + \varphi_2^2(x)\,Q(x) = \{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,P(x)\}^2 - \varphi_2^2(x)\,R(x)$$

enthält jeden Factor $x - b_\varkappa$ in der $m_\varkappa$ten und $x - c_\varkappa$ in der $2n_\varkappa$ten Potenz. Ein Factor $x - e_\varkappa$ kommt für $\varepsilon_\varkappa = 1$ in derjenigen Potenz vor, welche durch die kleinere der beiden Zahlen $2\nu_\varkappa + 1$ und $2\nu_\varkappa + 2\left(\frac{\omega_\varkappa}{2}\right)$ gegeben wird; für $\varepsilon_\varkappa = 0$ kommt er in der Potenz $2\nu_\varkappa + \left(\frac{2\mu_\varkappa - \omega_\varkappa}{4}\right)$ vor. In beiden Fällen ist dies, wie sich leicht zeigen lässt, die Potenz $2\nu_\varkappa + \frac{\mu_\varkappa - \delta_\varkappa - \zeta_\varkappa}{2}$. Daher ergiebt sich

$$\varphi_0^2(x) + 2\varphi_0(x)\varphi_2(x)P(x) + \varphi_2^2(x)\,Q(x) = C_2\sqrt{b}\,\Pi(x-b)^m\,\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu+\frac{\mu-\delta-\zeta}{2}}(x-h).$$

In dem speciellen Falle

$$p_0^2 + 2p_0p_2a + p_2^2b = 0,$$

wo sich der Grad der Function um 1 erniedrigt, fällt der Factor $x-h$ ganz fort; man erhält diesen Fall aus der allgemeinen Gleichung, indem man h unendlich werden lässt, $C_2 h$ aber als endlich annimmt.

Ferner ist die Function

$$\varphi_0^2(x)P(x)+2\varphi_0(x)\varphi_2(x)Q(x)+\varphi_2^2(x)P(x)Q(x)=P(x)\{[\varphi_0(x)+\varphi_2(x)P(x)]^2-\varphi_2^2(x)R(x)\}-2\varphi_0(x)\varphi_2(x)R(x)$$

durch $(x-b_\varkappa)^{2m_\varkappa}$ und $(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa}$ theilbar. Die Potenz, in der ein Factor $x-e_\varkappa$ in der Function enthalten ist, wird für $\varepsilon_\varkappa=1$ durch die Zahl $2\nu_\varkappa+\mu_\varkappa=2\nu_\varkappa+\mu_\varkappa-\zeta_\varkappa$ und für $\varepsilon_\varkappa=0$ durch die Zahl $2\nu_\varkappa+\mu_\varkappa-1=2\nu_\varkappa+\mu_\varkappa-\delta_\varkappa$ geliefert. Daher wird

$$\varphi_0^2(x)P(x)+2\varphi_0(x)\varphi_2(x)Q(x)+\varphi_2^2(x)P(x)Q(x)=C_1 b\,\Pi(x-b)^{2m}\,\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu+\mu-\delta-\zeta}(x)_2,$$

wo $(x)_2$ eine ganze rationale Function von x vom Grade

$$\Sigma\beta+\Sigma(\delta+\zeta)=2$$

bedeutet. Diese Function kann noch Factoren $x-e_\varkappa$ enthalten. Den speciellen Fall

$$p_0^2 a+2p_0p_2 b+p_2^2 ab=0,$$

in dem sich der Grad der Function auf der linken Seite, mithin der der Function $(x)_2$ erniedrigt, erhält man aus dem allgemeinen, analog wie oben. Gleichzeitig hiermit kann in der vorher betrachteten Function der Factor $x-h$ nicht fortfallen.

Aus dieser Zerlegung in Linearfactoren ergiebt sich

$$\frac{\varphi_0^2(x)P(x)+2\varphi_0(x)\varphi_2(x)Q(x)+\varphi_2^2(x)P(x)Q(x)}{\varphi_1^2(x)Q(x)}=C_1\frac{(x)_2}{\Pi(x-b)^\beta\,\Pi(x-e)^{\delta+\zeta}}$$

$$=C_1\frac{(x-g_1)(x-g_2)}{(x-k_1)(x-k_2)}$$

$$\frac{\{\varphi_0^2(x)+2\varphi_0(x)\varphi_2(x)P(x)+\varphi_2^2(x)Q(x)\}^2}{\varphi_1^4(x)Q(x)}=C_2^2\frac{(x-h)^2}{\Pi(x-b)^\beta\,\Pi(x-e)^{\delta+\zeta}}$$

$$=C_2^2\frac{(x-h)^2}{(x-k_1)(x-k_2)}.$$

Dabei können g_1 und g_2 den Grössen k_1 und k_2 gleich sein.

Die Gleichung zwischen x und ξ geht daher über in die Gleichung zweiten Grades in x

$$(x-k_1)(x-k_2)\xi^4-2C_1(x-g_1)(x-g_2)\xi^2+C_2^2(x-h)^2=0,$$

welche auch

$$\chi_0(x)\xi^4+\chi_1(x)\xi^2+\chi_2(x)=0$$

geschrieben werden soll.

Zunächst werde nun angenommen, diese Gleichung zwischen x und ξ sei irreducibel. Dies ist unbedingt der Fall, wenn k_1 und k_2 verschieden sind, also $\Pi(x-b)^\beta\,\Pi(x-e)^{\delta+\zeta}$ kein Quadrat ist. Dann ergiebt sich

$$x^2(\xi^4-2C_1\xi^2+C_2^2)-x[(k_1+k_2)\xi^4-2C_1(g_1+g_2)\xi^2+2C_2^2h]$$
$$+k_1k_2\xi^4-2C_1g_1g_2\xi^2+C_2^2h^2=0$$

und durch Auflösung nach x

$$x=\frac{(k_1+k_2)\xi^4-2C_1(g_1+g_2)\xi^2+2C_2^2h+\xi\eta}{2(\xi^4-2C_1\xi^2+C_2^2)},$$

wo

$$\eta^2 = (k_1 - k_2)^2\,\xi^6 + 4C_1\,[(g_1 - k_1)\,(g_2 - k_2) + (g_1 - k_2)\,(g_2 - k_1)]\,\xi^4$$
$$+ 4\,[C_1^2\,(g_1 - g_2)^2 - C_2^2\,(h - k_1)\,(h - k_2)]\,\xi^2 + 8C_1\,C_2^2\,(h - g_1)\,(h - g_2)$$

gesetzt ist. Mithin folgt

$$\xi\,\eta = \chi'_0(x)\,\xi^4 + \chi'_1(x)\,\xi^2 + \chi'_2(x)$$

$$= \frac{\{\chi_0(x)\,\chi'_1(x) - \chi_1(x)\,\chi'_0(x)\}\,\{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2\}^2 + \{\chi_0(x)\,\chi'_2(x) - \chi_2(x)\,\chi'_0(x)\}\,\varphi_1^2(x)\,y^2}{\chi_0(x)\,\varphi_1^2(x)\,y^2};$$

mit Hülfe der Relation $y^4 = 2P(x)\,y^2 - Q(x)$ lässt sich $\xi\,\eta$ auf die Form

$$\xi\,\eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)\,y^2}{\chi_0(x)\,\varphi_1^2(x)\,y^2}$$

bringen, woraus weiter hervorgeht

$$\eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)\,y^2}{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}\;\frac{1}{\chi_0(x)\,\varphi_1(x)\,y}$$

$$y = \frac{\varphi_2(x)\,X_0(x) - \varphi_0(x)\,X_2(x) + \chi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_1^2(x)\,\xi\,\eta}{[\chi_0(x)\,\varphi_1^2(x)\,\xi\,\eta - X_2(x)]\,\varphi_1(x)\,\xi}.$$

Führt man in diesen Ausdruck für x den obigen Werth in ξ, η ein, so lässt sich y auf die Form bringen

$$y = \frac{\Phi_0(\xi) + \Phi_2(\xi)\,\eta}{\Phi(\xi)}.$$

Demgemäss ist gezeigt, wie sich das betrachtete Gebilde durch die rationalen Substitutionen

$$x = \frac{(k_1 + k_2)\,\xi^4 - 2C_1\,(g_1 + g_2)\,\xi^2 + 2C_2^2 h + \xi\,\eta}{2\,(\xi^4 - 2C_1\,\xi^2 + C_2^2)},\qquad y = \frac{\Phi_0(\xi) + \Phi_2(\xi)\,\eta}{\Phi(\xi)}$$

$$\xi = \frac{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}{\varphi_1(x)\,y},\qquad \eta = \frac{X_0(x) + X_2(x)\,y^2}{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}\;\frac{1}{\chi_0(x)\,\varphi_1(x)\,y}$$

in die Gleichung

$$\eta^2 - (k_1 - k_2)^2\,\xi^6 - 4C_1\,[(g_1 - k_1)\,(g_2 - k_2) + (g_1 - k_2)\,(g_2 - k_1)]\,\xi^4$$
$$- 4\,[C_1^2\,(g_1 - g_2)^2 - C_2^2\,(h - k_1)\,(h - k_2)]\,\xi^2 - 8\,C_1\,C_2^2\,(h - g_1)\,(h - g_2) = 0$$

transformiren lässt, die Irreducibilität der obigen Gleichung zwischen ξ und x vorausgesetzt.

Die Irreducibilität jener Gleichung steht fest, wenn k_1 und k_2 nicht einander gleich sind. Ist aber $k_1 = k_2$, so wird unter Annahme derselben die transformirte Gleichung in ξ nur vom vierten Grade, also vom Range $\varrho = 1$. Bei einer eindeutigen Substitution bleibt aber der Rang der Gleichung unverändert, die Transformation von $f(x, y) = 0$ in jene Gleichung ist also unmöglich, folglich ist für $k_1 = k_2$ die Voraussetzung der Irreducibilität nicht zulässig. In diesem Falle wird demnach die Gleichung zwischen x und ξ

$$\left(\xi^2 - \frac{\varphi_0^2(x) + 2\varphi_2(x)\,\varphi_2(x) + \varphi_2^2(x)\,Q(x)}{\varphi_1^2(x)\,\sqrt{Q(x)}}\right)^2 = 0.$$

Die Grösse k_1 ist gleich k_2 dann und nur dann, wenn eine Stelle $e_\varkappa$ vorkommt, sie werde mit e_0 bezeichnet, für welche $\varepsilon_0 = 0$, $\omega_0 = 2$, q_0 gerade gleich $2q$ ist, denn nur für eine solche Stelle $e_\varkappa$ ist $\delta_\varkappa + \zeta_\varkappa = 2$, also $\Pi(x - b)^\beta\,\Pi(x - e)^{\zeta + \delta}$ ein Quadrat. Für die übrigen Stellen

$e_\varkappa$ muss dann $\delta_\varkappa = \zeta_\varkappa = 0$ sein, nach der vorgenommenen Transformation der Gleichung $f(x, y) = 0$ ist daher für dieselben $\varepsilon_\varkappa = 1$, $\omega_\varkappa = \mu_\varkappa = 2$, $\lambda_\varkappa = 1$ und der Bedingung $\Sigma\gamma + \Sigma\varepsilon = 4$ gemäss dürfen höchstens vier solcher Stellen vorkommen. Die Zahlen $\beta_\varkappa$ sind sämmtlich Null, $Q(x)$ ist folglich ein Quadrat.

In der Gleichung $f(x,y) = 0$ kann also für diesen Fall

$$P(x) = a \prod_{\varkappa=1}^{\iota} (x-a_\varkappa)^{l_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{\alpha} (x-e_\varkappa)\,(x-e_0)^{\lambda_0}$$

$$Q(x) = b \prod_{\varkappa=1}^{\mathfrak{m}} (x-b_\varkappa)^{2m_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{\mathfrak{q}} (x-e_\varkappa)^2\,(x-e_0)^{2q+2}$$

$$R(x) = c \prod_{\varkappa=1}^{\mathfrak{n}} (x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+\gamma_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{\alpha} (x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa+1}\,(x-e_0)^{2\nu_0}$$

gesetzt werden, wobei eine der Zahlen λ_0 oder ν_0 gleich 1 und

$$\Sigma\gamma + \alpha = 4$$

sein muss. Dann wird

$$\varphi_0(x) = \Pi(x-b)^m\,\Pi(x-e)\,(x-e_0)^{q+1} f_{01}(x), \quad \varphi_2(x) = f_{21}(x),$$

$$\varphi_1(x) = \Pi(x-c)^n\,\Pi(x-e)^\nu\,(x-e_0)^{\nu_0},$$

wo die Functionen $f_{01}(x)$ und $f_{21}(x)$ durch eine Anzahl linearer Gleichungen vollständig bestimmt sind. Daher folgt

$$\frac{\varphi_0^2(x)\,P(x) + 2\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\,Q(x) + \varphi_2^2(x)\,P(x)\,Q(x)}{\varphi_1^2(x)\,Q(x)}$$

$$= \frac{a\,\Pi(x-a)^l (x-e_0)^{\lambda_0-1} f_{01}^2(x) + 2b\,\Pi(x-b)^m (x-e_0)^q f_{01}(x) f_{21}(x) + ab\,\Pi(x-a)^l (x-e_0)^{\lambda_0-1} f_{21}^2(x)}{b\,\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu-1}\,(x-e_0)^{2\nu_0-1}},$$

$$\frac{\varphi_0^2(x) + 2\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\,P(x) + \varphi_2^2(x)\,Q(x)}{\varphi_1^2(x)\,\sqrt{Q(x)}}$$

$$= \frac{\Pi(x-b)^m (x-e_0)^q f_{01}^2(x) + 2a\,\Pi(x-a)^l (x-e_0)^{\lambda_0-1} f_{01}(x) f_{21}(x) + b\,\Pi(x-b)^m (x-e_0)^q f_{21}^2(x)}{\sqrt{b}\,\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu-1}(x-e_0)^{2\nu_0-1}}.$$

Wegen der Reducibilität der Gleichung zwischen x und ξ müssen diese beiden Functionen identisch einander gleich, also

$$\{a\,\Pi(x-a)^l (x-e_0)^{\lambda_0-1} - \sqrt{b}\,\Pi(x-b)^m (x-e_0)^q\}\,\{f_{01}(x) - \sqrt{b}\,f_{21}(x)\}^2 = 0$$

sein, und da der erste Factor nicht identisch Null ist, so erhält man

$$f_{01}(x) = \sqrt{b}\,f_{21}(x),$$

folglich

$$\frac{\varphi_0^2(x) + 2\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\,P(x) + \varphi_2^2(x)\,Q(x)}{\varphi_1^2(x)\,\sqrt{Q(x)}} = 2\,\frac{a\,\Pi(x-a)^l (x-e_0)^{\lambda_0-1} + \sqrt{b}\,\Pi(x-b)^m (x-e_0)^q}{\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu-1}\,(x-e_0)^{2\nu_0-1}} f_{21}^2(x).$$

Dabei bestehen für die Function $f_{21}(x)$ die folgenden Gleichungen

$$\left[\frac{d^{r_\varkappa}}{dx^{r_\varkappa}}\left\{(a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q)\,f_{21}(x)\right\}\right]_{x=c_\varkappa}=0,\quad (r_\varkappa=0,1,\ldots n_\varkappa-1)$$

$$\left[\frac{d^{r_\varkappa}}{dx^{r_\varkappa}}\left\{(a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q)\,f_{21}(x)\right\}\right]_{x=e_\varkappa}=0,\quad (r_\varkappa=0,1,\ldots \nu_\varkappa-1)$$

$$\left[\frac{d^{r_0}}{dx^{r_0}}\left\{(a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q)\,f_{21}(x)\right\}\right]_{x=e_0}=0,\quad (r_0=0,1,\ldots \nu_0-2),$$

aus denen hervorgeht, dass diejenigen Factoren $x-c_\varkappa$, $x-e_\varkappa$ und $x-e_0$, welche die Function

$$a\,\Pi(x-a)^\lambda\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q$$

nicht enthält, in $f_{21}(x)$ resp. in der $n_\varkappa$ten, $\nu_\varkappa$ten und (ν_0-1)ten Potenz vorkommen. Aus der Relation

$$\{a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\,\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q\}\,\{a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}-\sqrt{b}\,\Pi(x-b)^m(x-e_0)^q\}$$
$$=c\,\Pi(x-c)^{2n+\gamma}\,\Pi(x-e)^{2\nu-1}\,(x-e_0)^{2\nu_0-2}$$

ergiebt sich, dass die erste Function links nur Linearfactoren der rechten Seite und zwar jeden Linearfactor, der überhaupt in ihr vorkommt, in derselben Potenz, wie die rechte Seite enthält. Es heben sich daher alle Factoren des Nenners der Function

$$2\,\frac{a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q}{\Pi(x-c)^{2n}\,\Pi(x-e)^{2\nu-1}\,(x-e_0)^{2\nu_0-1}}\,f_{21}^2(x)$$

gegen entsprechende Factoren des Zählers fort, mit Ausnahme des Factors $x-e_0$, der in der ersten Potenz im Nenner stehen bleibt. Da aber Zähler und Nenner von gleichem Grade $4\mu-5-\alpha$ sind, so bleibt auch im Zähler nur ein einziger Factor $x-g_0$ stehen.

Dabei ist nothwendig die Grösse g_0 entweder gleich einem $c_\varkappa$, für das $\gamma_\varkappa=1$ ist, oder gleich einer der Grössen $e_1\ldots e_\alpha$. Denn ist $\alpha=0$, so ist der Grad der Function

$$a\,\Pi(x-a)^l\,(x-e_0)^{\lambda_0-1}+\sqrt{b}\;\Pi(x-b)^m\,(x-e_0)^q$$

gleich $2\mu-1$, mithin ungerade, die Function enthält daher nothwendig einen Factor $(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+1}$, während im Nenner nur $(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa}$ als Factor vorkommt, es bleibt also im Zähler $x-c_\varkappa$ einmal stehen.

Ist aber $\alpha>0$, so enthält entweder jene Function wieder einen Factor $(x-c_\varkappa)^{2n_\varkappa+1}$ und dann bleibt $x-c_\varkappa$ ebenfalls im Zähler übrig, oder sie enthält nur Factoren $x-c_\varkappa$ in gerader Potenz, dann müssen aber, weil ihr Grad $2\mu-1-\alpha$ ist, Factoren $(x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa-1}$ in gerader oder in ungerader Anzahl in ihr vorkommen, je nachdem α ungerade oder gerade ist, mithin muss dann die Function $f_{21}(x)$ durch einen Factor $x-e_\varkappa$ theilbar sein, den jene Function nicht enthält, also kommt in $f_{21}^2(x)$ $(x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa}$, im Nenner aber nur $(x-e_\varkappa)^{2\nu_\varkappa-1}$ vor, demnach bleibt $x-e_\varkappa$ einmal im Zähler übrig.

Daher wird die Gleichung zwischen x und ξ

$$\left(\xi^2 - C_2 \frac{x - g_0}{x - e_0}\right)^2 = 0,$$

wo g_0 entweder eine Grösse $c_\varkappa$, für die $\gamma_\varkappa = 1$, oder eine der Grössen $e_1 \ldots e_\alpha$ darstellt. Werden die übrigen drei der Grössen $c_\varkappa$, für die $\gamma_\varkappa = 1$, und $e_1 \ldots e_\alpha$ mit g_1, g_2, g_3 bezeichnet, so ist

$$R(x) = c\,\varphi_1(x)^2 (x - g_0)(x - g_1)(x - g_2)(x - g_3).$$

Führt man nun statt $\frac{\xi}{\sqrt{C_2}}$ eine neue Variable ein, die wieder mit ξ bezeichnet werden möge, so folgt

$$\xi^2 = \frac{x - g_0}{x - e_0}, \quad x = \frac{g_0 - e_0 \xi^2}{1 - \xi^2}, \quad x - e_0 = \frac{g_0 - e_0}{1 - \xi^2},$$

mithin

$$\begin{aligned} y^2 &= P(x) + \varphi_1(x) \sqrt{c(x - g_0)(x - g_1)(x - g_2)(x - g_3)} \\ &= P(x) + \xi\,\varphi_1(x) \sqrt{c(x - e_0)(x - g_1)(x - g_2)(x - g_3)} \\ &= P(x) + \xi \frac{\varphi_1(x)}{(1 - \xi^2)^2} \sqrt{c(g_0 - e_0) \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=3} \{g_0 - g_\varkappa - (e_0 - g_\varkappa)\xi^2\}}. \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\eta^2 = c(g_0 - e_0) \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=3} \{g_0 - g_\varkappa - (e_0 - g_\varkappa)\xi^2\}$$

ergiebt sich daher

$$y^2 = P(x) + \frac{\varphi_1(x)\,\xi\,\eta}{(1 - \xi^2)^2}$$

$$\eta = \frac{y^2 - P(x)}{\varphi_1(x)} \frac{(1 - \xi^2)^2}{\xi} = y \frac{y^2 - P(x)}{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2} \left(\frac{g_0 - e_0}{x - e_0}\right)^2,$$

indem aus der Relation zwischen x, y und ξ folgt

$$y = \frac{\varphi_1(x)\,\xi}{\varphi_0(x) + \varphi_2(x)\,y^2}.$$

Führt man hier auf der rechten Seite für y^2 und x die vorstehenden Werthe ein, so wird y eine rationale Function von ξ und η.

Also auch für den Fall, wo die Gleichung zwischen x und ξ reducibel ist, lassen sich eindeutige Substitutionen für x und y angeben, durch welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ in

$$\eta^2 - c(g_0 - e_0) \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=3} \{g_0 - g_\varkappa - (e_0 - g_\varkappa)\xi^2\} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung ist, wie es sein muss, in ξ vom sechsten Grade.

10.

Die Functionen $H(xy)_\alpha$ sind allgemein für die Gleichung $f(x, y) = 0$ hergestellt worden. Für diejenigen Fälle, in welchen die Gleichung $f(x, y) = 0$ im Vorhergehenden auf die Form $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ transformirt wurde, lassen sich auch die Functionen $H(xy, x'y')$ und $H'(xy)_\alpha$

für das durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ definirte Gebilde leicht herstellen. Ist $\Xi(\xi)$ von geradem Grade, so kann durch eine lineare Substitution die Gleichung $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ so umgeformt werden, dass $\Xi(\xi)$ von ungeradem Grade wird. Daher kann angenommen werden, $f(x, y) = 0$ sei in den behandelten Fällen durch die rationalen Substitutionen

$$x = P(\xi\,\eta), \qquad y = Q(\xi\,\eta),$$

aus denen umgekehrt die rationalen Functionen

$$\xi = P_1(xy), \qquad \eta = Q_1(xy)$$

folgen, in die Gleichung

$$\eta^2 - (\xi - \alpha_0)(\xi - \alpha_1) \ldots . (\xi - \alpha_{2\varrho}) = 0$$

transformirt. Wird dann

$$M(\xi) = (\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_3) \ldots . (\xi - \alpha_{2\varrho-1})$$
$$N(\xi) = (\xi - \alpha_0)(\xi - \alpha_2) \ldots . (\xi - \alpha_{2\varrho})$$

gesetzt, so ist

$$H(\xi\eta, \xi'\eta') = \frac{M(\xi')}{2(\xi' - \xi)\eta'}\left\{\frac{\eta}{M(\xi)} + \frac{\eta'}{M(\xi')}\right\}$$

$$H'(\xi\eta)_\beta = -\frac{N(\alpha_{2\beta-1})\ M(\xi)}{2M'(\alpha_{2\beta-1})\ \eta\,(\xi - \alpha_{2\beta-1})^2}, \quad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho),$$

wo die $\varrho + 1$ Stellen, für welche die Function $H(\xi\eta, \xi'\eta')$ von der ersten Ordnung unendlich wird, mit den Stellen $(\alpha_1\,0)$, $(\alpha_3\,0) \ldots . (\alpha_{2\varrho-1}\,0)$, $(\xi'\,\eta')$ identisch sind. Für die unendlich ferne Stelle verschwindet die Function.

Zu Folge der Relationen $x = P(\xi\,\eta)$, $y = Q(\xi\,\eta)$ mögen den Stellen $(\alpha_1\,0)$, $(\alpha_3\,0) \ldots . (\alpha_{2\varrho-1}\,0)$, $(\xi'\,\eta')$ und der unendlich fernen Stelle des durch die Gleichung $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ definirten Gebildes die Stellen $(a_1\,b_1)$, $(a_2\,b_2)$, $\ldots$ $(a_\varrho\,b_\varrho)$, $(x'\,y')$ und $(a_0\,b_0)$ in dem durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ definirten Gebilde entsprechen. Führt man dann in die Function $H(\xi\eta, \xi'\eta')$ die Substitutionen $\xi = P_1(xy)$, $\eta = Q_1(xy)$ ein, so erhält man eine rationale Function $\overline{H}(x\,y, x'\,y')$ von $(x\,y)$, die für die $\varrho + 1$ Werthepaare $(a_1\,b_1)$, $\ldots$ $(a_\varrho\,b_\varrho)$, $(x'\,y')$ von der ersten Ordnung unendlich wird und an der Stelle $(a_0\,b_0)$ verschwindet. Die Entwickelung von $\overline{H}(x\,y, x'\,y')$ nach Potenzen von $x - x'$ habe die Form

$$\overline{H}(x\,y, x'\,y') = g(x'\,y')(x - x')^{-1} + \mathfrak{P}(x - x'),$$

so ist

$$-\frac{f(x'\,y')_2}{g(x'\,y')}\overline{H}(xy, x'y') = -f(x'y')_2(x - x')^{-1} + \mathfrak{P}_1(x - x').$$

Die Function auf der linken Seite hat jetzt alle Eigenschaften der Function $H(xy, x'y')$ für die Gleichung $f(x,y) = 0$, sie ist mithin eine solche Function.

Ebenso mögen durch jene Substitutionen die Functionen $H(\xi'\,\eta')_\beta$, $H^0(\xi'\eta')_\beta$, $H'(\xi'\,\eta')_\beta$ in $\overline{H}(x'\,y')_\beta$, $\overline{H}^0(x'y')_\beta$, $\overline{H}'(x'\,y')_\beta$ übergehen, so ist

$$\overline{H}(x_t^\beta\, y_t^\beta, x'y') = t^{-1}\overline{H}(x'\,y')_\beta + \overline{H}^0(x'y')_\beta - t\,\overline{H}'(x'\,y')_\beta \ldots .,$$

folglich

$$-\frac{f(x'y')_2}{g(x'y')}\overline{H}(x_t^\beta\, y_t^\beta, x'y') = -t^{-1}\overline{H}(x'y')_\beta\frac{f(x'y')_2}{g(x'y')} - \overline{H}^0(x'y')_\beta\frac{f(x'y')_2}{g(x'y')} + t\,\overline{H'}\,(x'y')_\beta\frac{f(x'y')_2}{g(x'y')}\cdots.$$

Da in dieser Gleichung die linke Seite eine Function $H(xy, x'y')$ ist, so ist der Coefficient von $-t$ auf der rechten Seite die Function $H'(x'y')_\beta$ für die Gleichung $f(x,y) = 0$.

Auf diese Weise kann man die Functionen $H(xy, x'y')$ und $H'(xy)_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$, für die Gleichung $f(x, y) = 0$ aus den entsprechenden Functionen für $\eta^2 - \Xi(\xi) = 0$ in denjenigen Fällen herstellen, für welche die Transformation der einen Gleichung in die andere ausgeführt ist.

VITA.

Natus sum Georgius Hermannus Hettner Jenae a. h. s. LIV die XXI mensis Augusti Hermanno patre, matre Maria e gente de Stockmar. Fidei addictus sum evangelicae. Dresdae, cum primis litterarum elementis imbutus essem, gymnasium, quod est ad aedem crucis, novem per annos frequentavi. Ibi viri ill. Abendroth, Amthor, Baltzer ad rerum mathematicarum studium me incitaverunt. Anno LXXII maturitatis testimonio instructus primum Lipsiae per tria semestria legentes audivi viros ill. Bruhns, Drobisch, Engelmann, Hankel, Mayer, Von der Mühll, Neumann, Scheibner, Zöllner, deinde Berolini septem per semestria a viris ill. du Bois-Reymond, Dühring, Frobenius, Glan, Helmholtz, G. Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Pochhammer, Thomé, de Treitschke, Weierstrass, Zeller institutus sum; seminarii mathematici per quinque semestria fui sodalis.

Quorum virorum omnium pio animo memoriam recolam. Summas autem gratias viris ill. Kronecker, Kummer, Weierstrass et nunc ago et semper habebo.

THESEN.

I.

Der von Gauss in seiner Doctordissertation (1799) gegebene Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist wegen der grösseren Anschaulichkeit seinem in den Grundzügen übereinstimmenden Beweise vom Jahre 1849 vorzuziehen.

II.

Es ist unbefriedigend und bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Analysis nicht gerechtfertigt, die elliptischen Functionen aus den ϑ-Functionen herzuleiten, ohne vorher zu zeigen, wie man naturgemäss zu den ϑ-Functionen geführt wird.

III.

Eine genaue Unterscheidung der Singularitäten ebener Curven und Flächen muss sich auf die Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen einer resp. zweier unabhängiger veränderlicher Grössen stützen.